SIMULAZIONE DELLA DINAMICA DI UN SERBATOIO

DAVIDE TAMBUCHI

SOMMARIO. In questa dispensa vengono sviluppati degli algoritmi di simulazione della dinamica di serbatoi e invasi di forme differenti. L'analisi viene condotta a tempo discreto. L'algoritmo può essere facilmente rappresentato con l'aiuto di un foglio elettronico, ad esempio `Openoffice Calc` in ambiente `Linux`.

1. MODELLIZZAZIONE

Consideriamo un serbatoio cilindrico (figura 1). Siano:

- $p_1(t)$ la portata (volumetrica) d'acqua in ingresso,
- $p_2(t)$ la portata (volumetrica) d'acqua in uscita,
- $h(t)$ il livello d'acqua presente nel serbatoio,
- $V(t)$ il volume d'acqua presente nel serbatoio,
- S la sezione (costante) di base del cilindro,
- t il tempo.

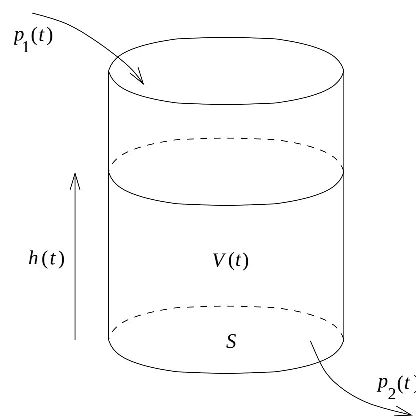

FIGURA 1. Serbatoio a base cilindrica

Osserviamo innanzitutto che in qualsiasi istante t, è possibile calcolare il volume d'acqua $V(t)$ presente nel serbatoio se conosciamo il livello $h(t)$ d'acqua; si tratta infatti di calcolare il volume di un cilindro nota la sua base e la sua altezza:

$$V(t) = S \cdot h(t) \tag{1}$$

In un intervallo di tempo Δt, entrerà nel serbatoio una volume di acqua pari al prodotto della portata in ingresso per l'intervallo di temp considerato; se indichiamo con ΔV_i il volume d'acqua entrante, si avrà:

$$\Delta V_i(t) = p_1(t) \cdot \Delta t \tag{2}$$

Questa quantità è il volume d'acqua entrante tra gli istanti di tempo t e $t + \Delta t$.

Se il condotto di uscita del serbatoio è sufficientemente lungo, si può ritenere che la portata d'acqua in uscita $p_2(t)$ sia direttamente proporzionale all'altezza del liquido presente nel serbatoio; se indichiamo con k questo coefficiente di proporzionalità (che dipende dalla geometria del condotto di uscita), possiamo scrivere:

$$p_2(t) = kh(t) \tag{3}$$

Di conseguenza, il volume d'acqua $\Delta V_u(t)$ uscente dal serbatoio nell'intervallo di tempo Δt (cioè tra gli istanti t e $t + \Delta t$) sará pari a:

$$\Delta V_u(t) = p_2(t)\Delta t = kh(t)\Delta t \tag{4}$$

Il volume d'acqua contenuto nel serbatoio all'instante $t + \Delta t$ è pari al volume d'acqua presente all'instante t, più il volume entrato nell'intervallo Δt, meno il volume uscito in tale intervallo di tempo:

$$V_(t + \Delta t) = V(t) + \Delta V_i(t) - \Delta V_u(t) \tag{5}$$

Sostituendo nella (5) le (1), (2), (4), e ricordando che $V(t+\Delta t) = S \cdot h(t+\Delta t)$, otteniamo:

$$S \cdot h(t + \Delta t) = S \cdot h(t) + p_1(t)\Delta t - kh_(t)\Delta t \tag{6}$$

Dividendo il tutto per la sezione S del serbatoio, otteniamo allora:

$$h(t + \Delta t) = h(t) + (\frac{p_1(t)}{S} - \frac{kh(t)}{S})\Delta t \tag{7}$$

Questa equazione esprime l'altezza d'acqua nel serbatoio all'instante di tempo $t+\Delta t$ in funzione dell'altezza $h(t)$ presente all'instante t, e della portata in ingresso $p_1(t)$. Scegliendo intervalli di tempo Δt sufficientemente piccoli (in modo che in tale intervallo di tempo la variazione del livello d'acqua sia molto piccola rispetto al livello stesso), è possibile simulare la dinamica del serbatoio. Per far ciò, conviene ricavare dalla (7) la *variazione* del livello d'acqua nel serbatoio $\Delta h(t) = h(t+\Delta t) - h(t)$:

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S} \cdot (p_1(t) - kh_(t))\Delta t \tag{8}$$

2. L'algoritmo di simulazione

Scriviamo ora un algoritmo in grado di calcolare, istante per istante, l'altezza dell'acqua presente nel serbatoio e la portata di uscita, nota la portata d'acqua in ingresso, e nota l'altezza della colonna d'acqua all'istante iniziale $t = 0$.

Algoritmo A Calcolo del livello d'acqua e della portata di uscita di un serbatoio di forma cilindrica.

Input

- $h(0)$ (reale): livello d'acqua all'istante $t = 0$.
- n (intero): numero di istanti in cui calcolare livello e portata.
- Δt (reale): intervallo di tempo tra un istante e l'altro
- k (reale): coefficiente di proporzionalità tra livello e portata di uscita.
- S (reale): superficie della base serbatoio.
- $p_1(i)$ (reale): portata in ingresso tra l'istante di tempo $\Delta t \cdot i$ e l'istante di tempo successivo $\Delta t \cdot (i + 1)$, con $0 \leq i \leq n - 1$.

Output

- $h(i)$ (reale): livello d'acqua presente nel serbatoio all'istante di tempo $t = \Delta t \cdot i$, con $0 \leq i \leq n-1$.
- $p_2(i)$ (reale): portata d'uscita al tempo $t = \Delta t \cdot i$, con $0 \leq i \leq n-1$.

Passo 1: [Inizializza] $i \leftarrow 0$ (Inizializza la variabile i che conta gli istanti di tempo).
Passo 2: [Tempo] $t = \Delta t \cdot i$ (Calcola l'istante di tempo considerato).
Passo 3: [Portata iniziale] $p_2(i) \leftarrow k \cdot h(i)$ (Calcola la portata in uscita dal serbatoio).
Passo 4: [Finito?] Se $i = n-1$ vai al Passo 8 (Fine computazione).
Passo 5: [Incremento] $\Delta h \leftarrow \frac{1}{S} \cdot (p_1(i) - kh(i))\Delta t$ (Calcola l'*incremento* del livello d'acqua tra gli istanti di tempo $\Delta t \cdot i$ e $\Delta t \cdot (i+1)$).
Passo 6: [Nuovo livello] $h(i+1) \leftarrow h(i) + \Delta h$ (Calcola il nuovo livello d'acqua aggiungendo al vecchio livello l'incremento calcolato al Passo 5).
Passo 7: [Salto] Torna al passo 2 (Resta in ciclo per considerare l'istante di tempo successivo).
Passo 8: [Fine] Stop. ■

3. Rappresentazione dell'algoritmo con un foglio elettronico

Questo algoritmo può essere rappresentato con l'aiuto di un foglio elettronico, ad esempio `Openoffice Calc` in ambiente `Linux`. Ciò è rappresentato in figura 2. Nella prima colonna compare la numerazione degli istanti di tempo ($i = 0, 1, \ldots, n-1$), nella seconda i valori del tempo $t = \Delta t \cdot i$, nella terza colonna la portata in ingresso $p_1(i)$. Per quanto riguarda gli output, nella quarta colonna poniamo il livello d'acqua $h(i)$, nella quinta l'incremento del livello d'acqua Δh tra due istanti di tempo consecutivi, ed infine nella sesta la portata d'acqua in uscita.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n. istante	tempo	portata ingr.	livello	incremento	portata usc.	S	50	(m^2)
2		(s)	(m^3/s)	(m)	(m)	(m^3/s)	DT	0,1	(s)
3	0	=A3*$H$2	0,01	4,15	=(C3−H4$*D3)*$H$2/$H$1	=D3*$H$4	N	6	
4	1		0,02	=D3+E3			K	0,03	(m^2/s)
5	2		0,01						
6	3	trascinare	0,005		trascinare	trascinare			
7	4		0,01	trascinare					
8	5		0,02						

Figura 2. Rappresentazione dell'algoritmo con un foglio elettronico

Nella colonna H sono invece rappresentati i valori delle costanti S, Δt, n, k. Tali valori appaiono nelle formule *bloccati* dai caratteri dollaro, dato che mentre le formule vengono aggiornate trascinando il cursore verso il basso ai valori delle righe successive, le costanti compaiono sempre nel medesimo posto. Per ulteriori informazioni sull'uso di un foglio elettronico, si rimanda alla guida del programma stesso.

4. Avvertenza

Questo documento puó essere liberamente distribuito, purché senza modifiche, integralmente, gratuitamente e senza scopo di lucro o altri scopi commerciali. Ogni cura é stata posta nella stesura del documento. Tuttavia l'Autore non puó assumersi alcuna responsabilitá derivante dall'utilizzo della stessa. Per la segnalazione di errori e *bugs* contattare l'autore all'indirizzo email: `davide.tambuchi@tin.it`. Ultimo aggiornamento: 8 febbraio 2004.

Riferimenti bibliografici

[1] S. Rinaldi, C. Piccardi. *I Sistemi Lineari, Teoria, Modelli, Applicazioni*, Cittàstudiedizioni, Milano, (1997).
[2] D. Tambuchi. *Appunti per un Corso di Sistemi ed Automazione*, dispensa, (2001).
[3] D. Tambuchi. *Introduzione al linguaggio Ada95*, dispensa, (2003).

Typeset by LaTeX 2_ε *under* `LINUX`