

## 1.1 Introduzione

Il suono è una sensazione uditiva che è generalmente associata ad uno stimolo reale prodotto da un sistema vibrante. Da un punto di vista puramente fisico, il suono quindi non esiste in sè, ma più verosimilmente è dato da oscillazioni di un mezzo materiale (solido, liquido o gassoso) in grado di propagarsi in forma di onda entro qualche mezzo con una ben determinata velocità. Come tale, il suono può essere convenientemente studiato e compreso facendo uso del concetto di onda.

John Pierce sostiene che il concetto di onda è il più unificante della fisica e si potrebbe aggiungere, più sorprendente. Infatti alla base del concetto di onda sta il fatto che diverse forme d'energia possono essere trasportate da un qualche mezzo materiale senza che il mezzo stesso si sposti dalla sua posizione di quiete, se non per oscillazioni localizzate in una regione limitata dello spazio.

Ad esempio, un'onda marina che si abbatte sulla scogliera non è fisicamente una massa d'acqua che proviene dall'altra sponda del mare o dell'oceano, ma una oscillazione in parte superficiale e in parte sommersa, causata da una forza esterna (ad es. il vento) che si propaga e interessa nel corso della sua corsa punti diversi del mezzo di trasmissione. Per la verità, le onde marine sono un caso molto particolare prodotto da una combinazione di due componenti di moto, una prevalentemente circolare ed un'altra di tipo traslazionale dando luogo ad una funzione particolare denominata *trocoide*.

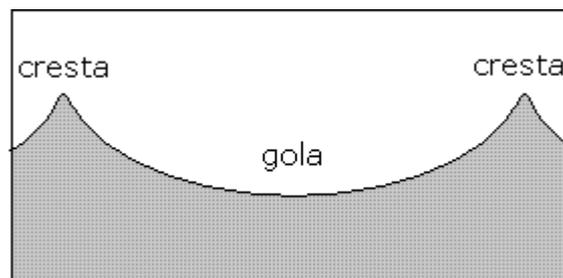


Fig. 1.1 – Profilo di onda marina

Il concetto di onda è un concetto universale e una volta definite le caratteristiche può essere impiegato per studiare il comportamento di sistemi fisici che possono essere spiegati in termini di onde. Ciò consente, entro limiti ragionevoli, di predire il comportamento del fenomeno stesso.

L'aspetto più evidente riscontrabile nelle onde è che esse trasportano energia piuttosto che materia. Le onde marine possono, in alcune circostanze, trasferire quantità notevole di energia tanto da abbattere manufatti o spostare grandi masse solide. Al contrario, le onde che trasportano il suono della voce umana hanno una potenza estremamente limitata.

Un'altra importante caratteristica delle onde è quella legata al tempo di propagazione che dipende evidentemente in primo luogo dalla velocità con cui viaggiano in un determinato mezzo.

## 1.2 Premessa ai meccanismi di propagazione delle onde

Le onde, come sarà chiarito in seguito, possono assumere svariate morfologie, ma in ogni caso essere possono essere descritte da parametri caratteristici che ne definiscono alcuni importanti aspetti. Un'onda si genera quando viene immessa in un determinato mezzo una qualche forma di energia: per esempio in una fune tesa ed ancorata ad una estremità, un movimento improvviso

all'estremità libera provoca un'onda impulsiva che avanza verso la direzione di ancoraggio, come mostrato in fig. 2.1.

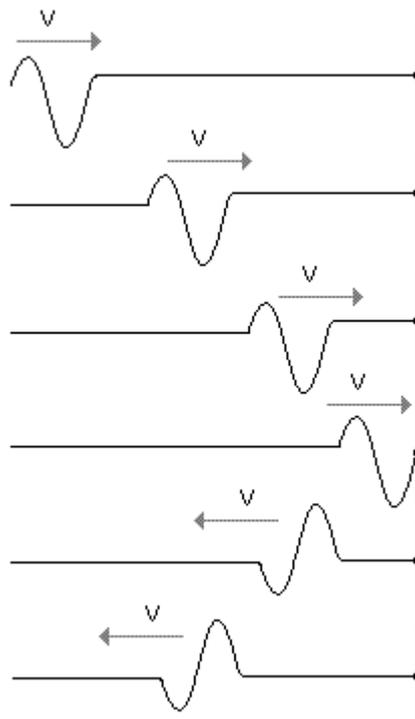


Fig. 2.1 – Schematizzazione d'impulso che si propaga su una fune ancorata ad una estremità

L'impulso viaggia da sinistra verso destra ad una determinata velocità. L'ostacolo rappresentato dall'ancoraggio rigido riflette all'indietro l'impulso evidenziandosi così due effetti: il primo, più semplice da dimostrare, riguarda il ribaltamento orizzontale dell'impulso poiché la porzione dell'impulso che urta l'ostacolo è la prima a tornare indietro mentre il secondo, riguarda il ribaltamento verticale (riflessione negativa), giustificato per un principio di tipo energetico, ed esattamente dalla terza legge di Newton. Infatti quando l'impulso si avvicina, la fune esercita una forza che tenderebbe a spostare verso l'alto l'ancoraggio che non potendosi muovere esercita sulla fune una forza verso il basso uguale e contraria. Ciò si traduce nella riflessione all'indietro dell'impulso e della sua inversione di segno.

La velocità di propagazione dell'onda dipende sostanzialmente da due fattori e può riassumersi nella relazione seguente:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

dove :

$c$  = velocità di propagazione dell'impulso [m/s]

$\mu$  = densità di massa o massa per unità di lunghezza [kg/m]

$T$  = tensione [Newton]

Come si vede dalla relazione, la velocità di propagazione aumenta all'aumentare della tensione e/o al diminuire della densità massa e viceversa.

Se l'ancoraggio non è fisso, ma può per esempio scorrere verticalmente, il meccanismo della riflessione produce un'onda riflessa che ha la stessa velocità dell'onda incidente (verso opposto) e nessuna inversione di fase, come mostrato nella figura 3.1. In questo caso, la forma dell'impulso è stata volutamente semplificata.

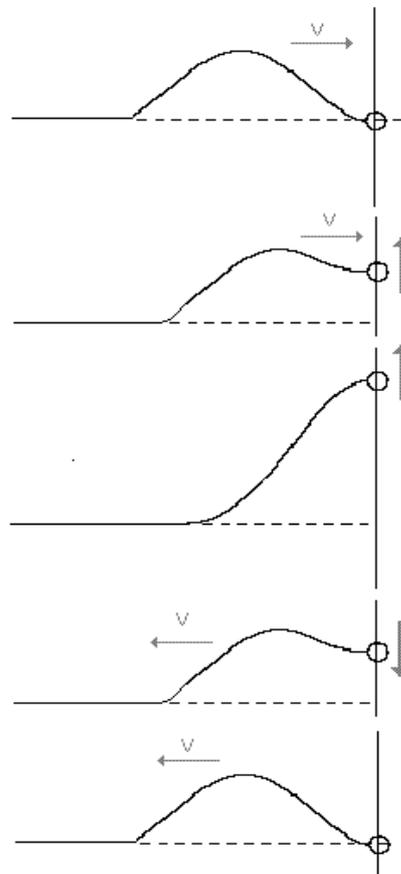


Fig. 3.1 – Schematizzazione d'impulso che si propaga su una fune ancorata su un terminale scorrevole

I due esempi esaminati rappresentano i due casi estremi: ancoraggi rigidi e liberi. Quando un'onda incontra un ancoraggio che non è completamente rigido, parte dell'onda è ritrasmesso all'indietro e parte dell'onda è trasmesso attraverso l'ancoraggio stesso.

Il pratica il duplice comportamento dipende dalle caratteristiche fisiche su entrambi i lati dell'ancoraggio stesso. A tale proposito è utile ricordare un'importante proprietà del mezzo di propagazione: l' *impedenza caratteristica*, definita come:

$$z = \mu \times c$$

dove:

$\mu$  = densità di massa (massa per unità di lunghezza)

$c$  = velocità di propagazione

Un caso interessante è rappresentato dalla propagazione di un'onda in un sistema che presenta regioni a diverso valore di densità. Quando si passa da una regione a bassa densità ad una regione ad alta densità, una parte dell'energia incidente viene riflessa e una parte viene trasmessa. La velocità dell'onda riflessa è la stessa dell'onda incidente ma ridotta in ampiezza e invertita di fase, come mostrato in figura 4.1.

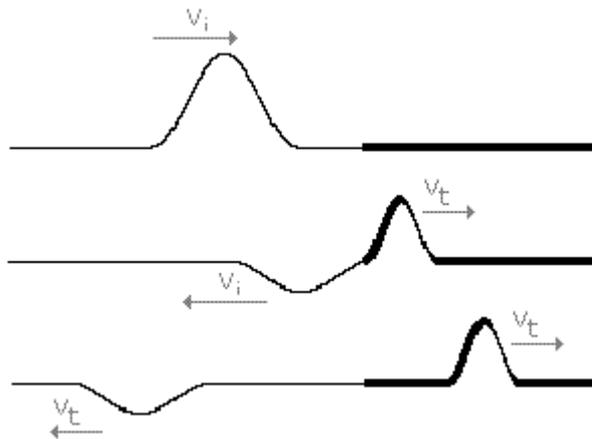


Fig. 4.1 – Effetti della propagazione in un mezzo con regioni a diversa densità (da bassa ad alta).

Viceversa, nel caso in cui si passi da un valore di alta densità a uno di bassa, l'onda riflessa viene ridotta in ampiezza ma la sua fase rimane inalterata (fig. 5.1).

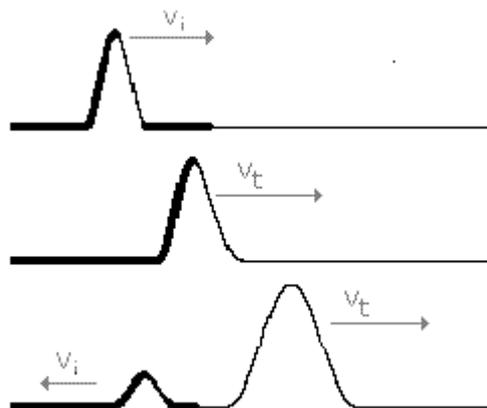


Fig. 5.1 – Effetti della propagazione in un mezzo con regioni a diversa densità (da alta a bassa).

Quando un sistema fisico è in grado di produrre oscillazioni ed immetterle in un mezzo di propagazione, tali oscillazioni viaggiano nel mezzo sotto forma di onda.

Tra le varie possibilità che hanno i sistemi vibranti di oscillare, prenderemo ora in considerazione le vibrazioni periodiche poiché rivestono un ruolo particolarmente significativo nel campo dell'acustica musicale. In ogni caso dobbiamo tenere in considerazione che i sistemi vibranti possono essere classificati a seconda del modo con il quale vengono eccitati. Ciò definisce di conseguenza due forme di oscillazioni: le oscillazioni libere e le oscillazioni forzate. Le prime si riferiscono a sistemi che sono messi in vibrazione da forze impulsive mentre nelle seconde l'energia viene continuamente fornita dall'esterno. La conseguenza più evidente che deriva da questi due diversi comportamenti definisce l'insieme dei meccanismi di funzionamento di tutti le varie famiglie degli strumenti dell'orchestra. Ad esempio, il suono del pianoforte è generato per effetto del trasferimento di un impulso di energia dal martello alla corda: tale energia iniziale, attraverso meccanismi che saranno descritti in seguito, viene gradualmente dissipata producendo una inesorabile estinzione del suono. Nel flauto e in tutti gli strumenti a fiato, per contro, il suono è mantenuto costantemente da un getto d'aria che viene continuamente fornito dall'esecutore e anche se con meccanismo sensibilmente diverso, la stessa cosa avviene negli strumenti ad arco.

### 1.3 Vibrazioni sinusoidali e onde

Le vibrazioni periodiche sinusoidali sono prodotte da sistemi vibranti in regime di moto armonico semplice, come può esserlo il moto pendolare o le oscillazioni di un grave sottoposto alla forza di gravità e dalla forza elastica di una molla fissata ad un vincolo fisso da un lato e al grave stesso dall'altra. In ogni caso, a questo punto della trattazione, non ci interessa particolarmente indagare sui sistemi che producono le oscillazioni, ma è importante definire le proprietà associabili alle relative tipologie d'onda da essi generate.

Ad esempio, riprendendo il caso di una fune, se un estremo risulta solidale con un sistema fisico in grado di produrre oscillazioni sinusoidali stabili, sulla fune stessa si produce un'onda progressiva che trasla con una determinata velocità lungo la fune stessa. Se immaginiamo la fune estesa indefinitamente, in un dato istante di tempo, la fune assumerà la forma indicata in figura 6.1

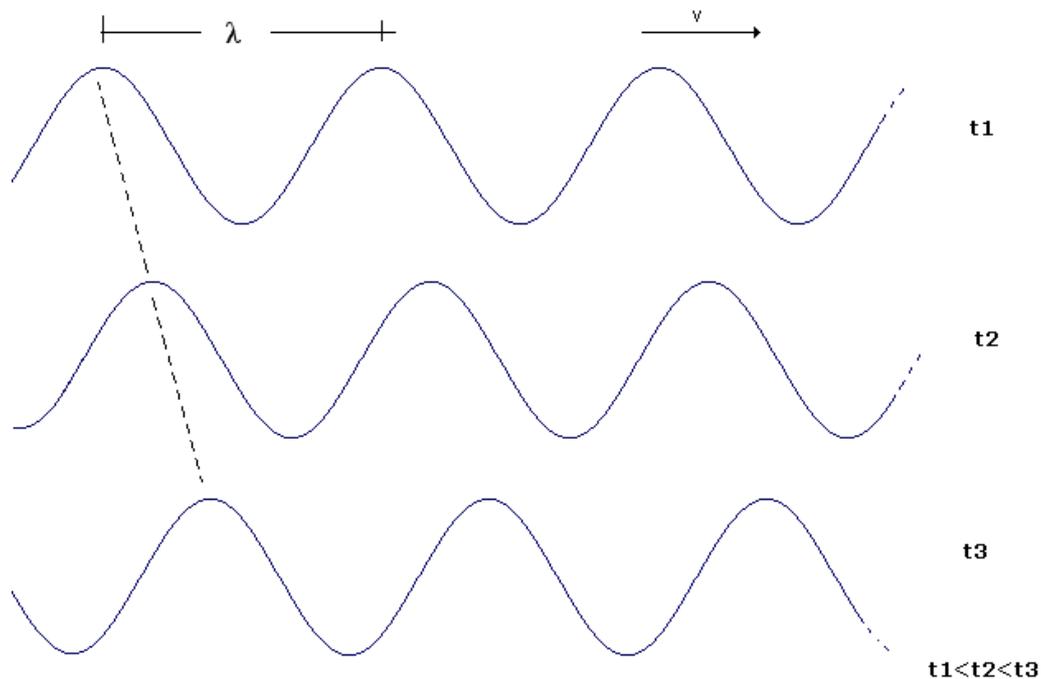


Fig. 6.1 Propagazione di un'onda sinusoidale lineare

Dalla figura 6.1 si evidenzia il moto di traslazione dell'onda progressiva da sinistra verso destra raffigurato in tre diversi istanti del tempo. L'onda si propaga lungo la direzione della fune con una certa velocità. Se il sistema oscillante vibra con una frequenza<sup>1</sup>  $f$ , in 1 secondo verranno prodotti  $f$  cicli completi. Dopo un secondo, le oscillazioni avranno compiuto un tragitto orizzontale pari a  $v$  metri. Ad esempio se il sistema vibrante produce una frequenza di 100 hz, dopo 1 secondo saranno stati generati 100 cicli che avranno compiuto  $v$  metri, essendo  $v$  la velocità di propagazione dell'onda. Ne consegue che ogni singolo ciclo sinusoidali occupa uno spazio pari a  $v/100$  metri. Tale valore, indicato come in figura 6.1 con la lettera greca  $\lambda$ , prende il nome di *lunghezza d'onda* ed è l'equivalente spaziale del periodo  $T$  dell'oscillazione, dove  $T = 1/f$  sec.

In definitiva, la lunghezza d'onda è definita semplicemente dalla relazione seguente:

<sup>1</sup> Frequenza: definita come il numero di cicli completi nell'unità di tempo, misurata in cps o Hz

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad \text{ovvero} \quad \lambda = v \times T$$

dove:

$\lambda$  = lunghezza d'onda (m)

$v$  = velocità di propagazione dell'onda (m/s)

$f$  = frequenza dell'oscillazione (Hz)

$T$  = periodo dell'oscillazione (sec)

Ne consegue che la lunghezza d'onda è l'equivalente spaziale del periodo di un'oscillazione periodica. Se la velocità di propagazione di un'onda fosse di 1 m/s, la lunghezza d'onda sarebbe esattamente uguale al periodo.

La velocità delle onde varia a seconda del mezzo materiale entro il quale si propagano e dipende dalle condizioni fisiche in cui tale mezzo si trova.

La propagazione di un'onda quindi interessa movimenti (impulsivi o oscillatori) localizzati del mezzo di trasmissione. Le onde possono essere classificate entro due categorie in base al relativo meccanismo di propagazione:

a) onde trasversali

b) onde longitudinali

Nelle onde trasversali, il movimento vibratorio del mezzo di trasmissione è perpendicolare al verso di propagazione, mentre nelle onde longitudinali il movimento di vibrazione è nella stessa direzione del verso di propagazione, come mostrato nella figura 7.1.

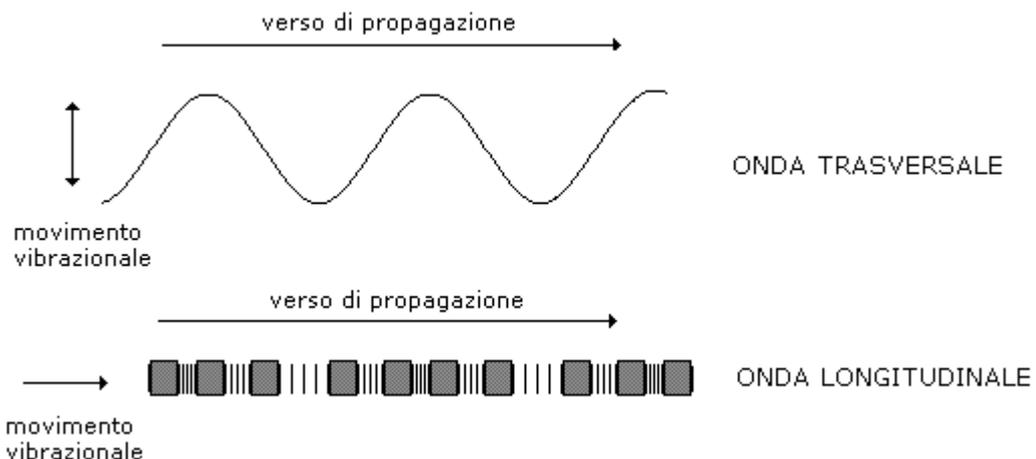


Fig. 7.1 Onde trasversali e longitudinali

La velocità di propagazione di un'onda trasversale in una corda metallica, come anticipato al paragrafo precedente, dipende dalla *tensione* della corda  $T$  e dalla *massa per unità di lunghezza*  $\mu$ . Tale tipo di onda riveste un carattere di particolare importanza nella comprensione dei fenomeni che presiedono i meccanismi di generazione del suono negli strumenti musicali, anche se nella realtà, le cose possono essere complicate dalla presenza di altre modalità di vibrazione.

In effetti, nei materiali solidi, oltre ai modi trasversali e longitudinali, le molecole possono vibrare in modo più complesso. Nella tabella seguente vengono riassunti alcune modalità di vibrazione dei solidi.

Modalità di vibrazione	Movimento delle molecole
Trasversale	Perpendicolare alla direzione di propagazione
Longitudinale	Parallelo alla direzione di propagazione
Superficiale (Rayleigh)	Ellittico- simmetrico
Onde planari (Lamb)	Componente perpendicolare alla superficie
Onde planari (Love)	Parallelo al piano superficiale, perpendicolare alla direzione dell'onda

Per esempio le onde superficiali o onde di Rayleigh possono essere presenti in materiali con uno spessore rilevante. Il moto delle molecole è ellittico e si estende all'interno del materiale per circa una lunghezza d'onda come si può vedere in figura 8.1.

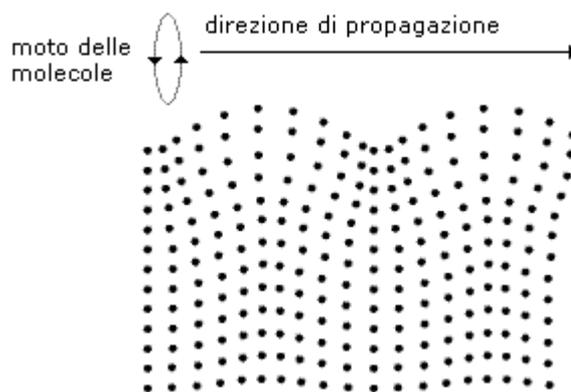


Fig. 8.1 Propagazione di un'onda di Rayleigh (moto molecolare ellittico)

Queste tipologie di onda sono importanti, ma la teoria generale della propagazione può essere compresa nelle sue linee fondamentali facendo uso delle prime due categorie. A tale proposito possiamo ad esempio calcolare la velocità di propagazione teorica<sup>2</sup> in un'onda trasversale in una corda metallica di acciaio di 0.9 mm di diametro sottoposta ad una tensione di 700 N. La densità di massa (massa per unità di lunghezza) sarà allora:

$$\mu = \rho S = \rho \pi r^2 = 0.00495 \text{ kg/m}$$

$\rho$  = densità dell'acciaio (7800 Kg/m<sup>3</sup>)

S = superficie

$\mu$  = massa per unità di lunghezza

da cui si trae:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{700}{0.00495}} = 376 \text{ m/s}$$

Questa velocità è notevolmente inferiore rispetto alle onde longitudinali nello stesso materiale che si propagano a velocità molto superiori.

<sup>2</sup> Si sottintende che la corda sia infinitamente sottile, ovvero che la sezione sia molto minore della sua lunghezza.

## 1.4 Interferenza e onde stazionarie

Quando due o più onde si propagano e s'incontrano su uno stesso mezzo esse si attraversano l'una con l'altra senza disturbarsi. L'unico effetto visibile è che lo spostamento complessivo delle parti interessate dall'incontro delle onde è la somma algebrica dei singoli spostamenti, e ciò in accordo con il *principio di sovrapposizione*. Nella figura 9.1 sono visualizzati due impulsi gaussiani si propagano in opposte direzioni su una corda in istanti successivi.

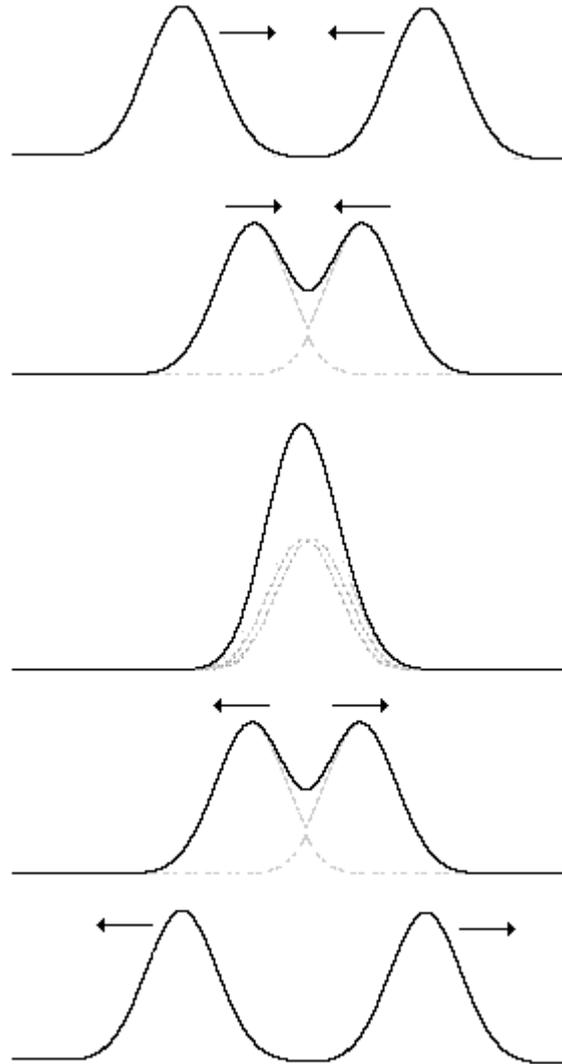


Fig. 9.1 Inteferenza prodotta da due impulsi gaussiani che si propagano con direzioni opposte

Si nota che i due impulsi, attraversandosi, si combinano tra loro producendo una variazione nella forma e nell'ampiezza totale. Questo comportamento risulta particolarmente interessante quando alla corda viene impresso un movimento periodico, per esempio di tipo sinusoidale. Ricordando che nella teoria dei segnali, un'oscillazione sinusoidale viene normalmente espressa analiticamente dalla seguente equazione in funzione del tempo:

$$s(t) = A \cos \omega t$$

dove:

$A$  = ampiezza massima

$\omega = 2 \pi f$  = pulsazione

$f$  = frequenza (hz).

Nel campo delle onde nei mezzi materiali, l'equazione di un'onda sinusoidale che si propaga deve tener conto anche della variabile spaziale oltre che ovviamente a quella temporale per cui la sua espressione diventerà (*onda progressiva*):

$$s(t, x) = A \cos(kx - \omega t)$$

Analogamente, per un'onda che si propaga in direzione opposta si avrà (*onda regressiva*):

$$s(t, x) = A \cos(kx + \omega t)$$

dove:

$x$  = spazio percorso

$$k = 2 \frac{\pi}{\lambda} = \text{numero d'onda}$$

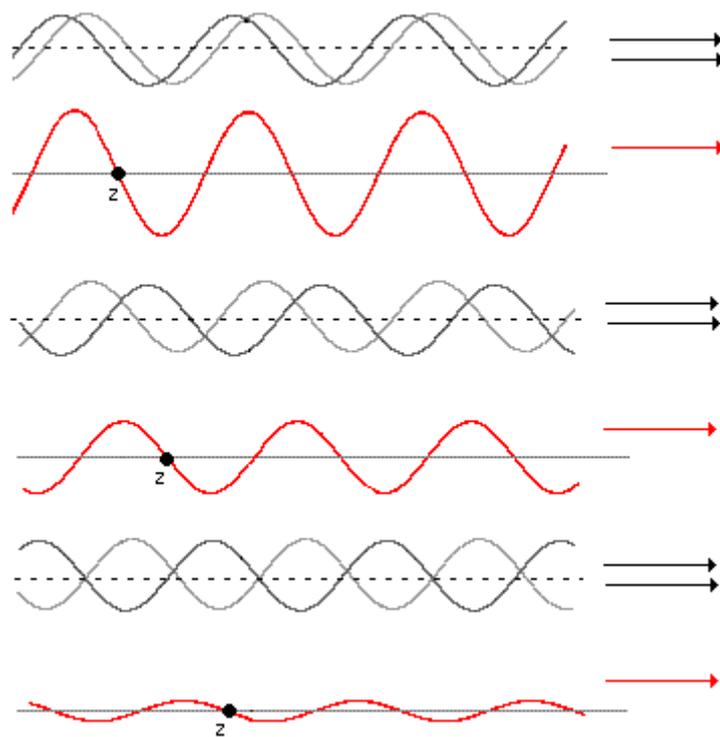


Fig. 10.1 Interferenza prodotta da due onde sinusoidali progressive con fase variabile

Quando due onde sinusoidali di stessa frequenza e ampiezza si propagano nella stessa direzione, eventualmente con una differente fase iniziale, l'onda risultante è ancora un'onda sinusoidale che si propaga nello stesso verso delle due onde componenti. Se la differenza di fase è nulla, l'ampiezza dell'onda risultante avrà un'ampiezza doppia, mentre se la differenza di fase è 180 gradi le due onde si cancellano a vicenda. Se la differenza di fase varia nel tempo, l'onda risultante si propaga sempre nello stesso verso, ma l'ampiezza è costantemente modulata in ampiezza per effetto delle diverse relazioni di fase che si vengono a creare (cfr. fig. 10.1). Si noti nel diagramma la posizione sempre diversa del punto di zero ( $z$ ) che scorre orizzontalmente verso destra.

Applicando il principio di sovrapposizione al caso di figura 10.1 si può scrivere l'equazione dell'onda risultante:

$$s(t, x) = A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

ovvero:

$$s(t, x) = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

dove  $\varphi$  = fase corrente

Il caso più interessante si verifica quando le due onde si propagano in direzioni opposte. Applicando lo stesso principio di sovrapposizione, l'onda risultante si può rappresentare nel modo seguente:

$$s(t, x) = A \cos(kx - \omega t) - A \cos(kx + \omega t + \varphi)$$

ovvero:

$$s(t, x) = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Questo risultato ci dice che la funzione risultante rappresenta un tipo d'onda molto particolare che non trasla ma oscilla ancorata a punti fissi. Tale tipo di oscillazione prende il nome di *onda stazionaria* (fig. 11.1).

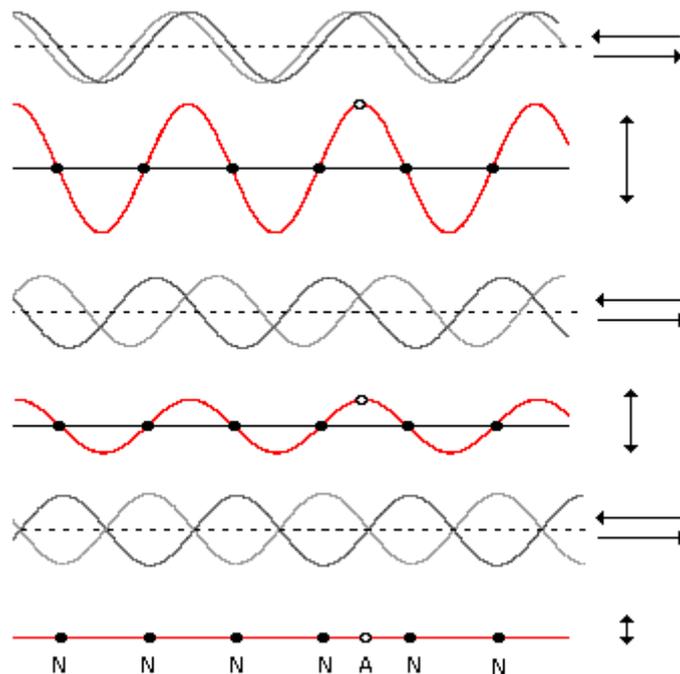


Fig. 11.1 Onda stazionaria prodotta da due onde sinusoidali che si propagano in direzioni opposte

I punti di zero sono, a differenza del caso precedente, sempre fissi in una determinata configurazione. Quando si verifica tale condizione tali punti fissi prendono il nome di *odi*. I punti compresi tra i nodi vibrano con differenti ampiezze ma perfettamente in fase tra loro ed in particolare i punti centrali tra due nodi consecutivi sono chiamati *antinodi* (o *ventri*).

E' possibile allora definire facilmente in un'onda stazionaria, le relazioni che intercorrono tra nodi, antinodi e lunghezza d'onda.

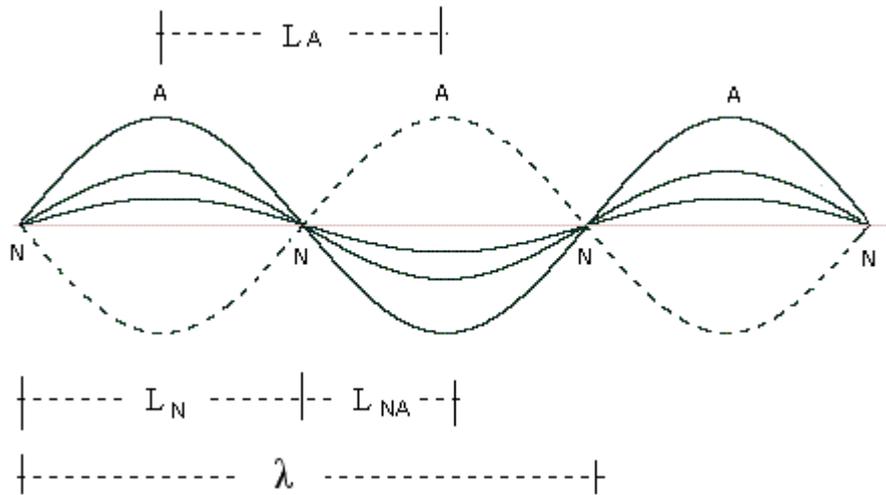


Fig. 12.1 Onda stazionaria e suoi parametri

In figura 12.1 è rappresentata un'onda stazionaria in istanti successivi di tempo. I punti della corda oscillano solo verticalmente e compiono un movimento completo di andata e ritorno. Solo i nodi (individuati dalla lettera N) non possono muoversi, mentre gli antinodi compiono la massima escursione (lettera A). Come si può facilmente osservare, valgono le seguenti relazioni:

$$L_N = L_A = \frac{\lambda}{2}$$

ovvero la distanza tra due nodi o tra due antinodi successivi vale sempre mezza lunghezza d'onda, mentre la distanza nodo-antinodo vale:

$$L_{NA} = \frac{\lambda}{4}$$

Attraverso queste relazioni sarà possibile predire le frequenze dei modi di vibrazione di una corda ideale.

## 1.5 Modi di vibrazione di una corda

La comprensione dei meccanismi fisiche governano una corda posta in vibrazione può essere affidata ad una rigorosa formulazione matematica. Ciò nondimeno, esiste una strada alternativa, che almeno nelle linee essenziali, conduce al risultato finale. Per intraprendere tale strada occorre partire da un modello elementare, ma molto efficace la cui paternità va attribuita ad Arthur Benade. In tale modello il sistema fisico oscillante è costituito da masse elementari connesse tra di loro da molle ideali, come mostrato in figura 13.1. In detta figura vengono rappresentati due diverse disposizioni delle masse: nel sistema ad una massa è possibile una sola configurazione mentre nel sistema a due masse sono possibili due configurazioni.

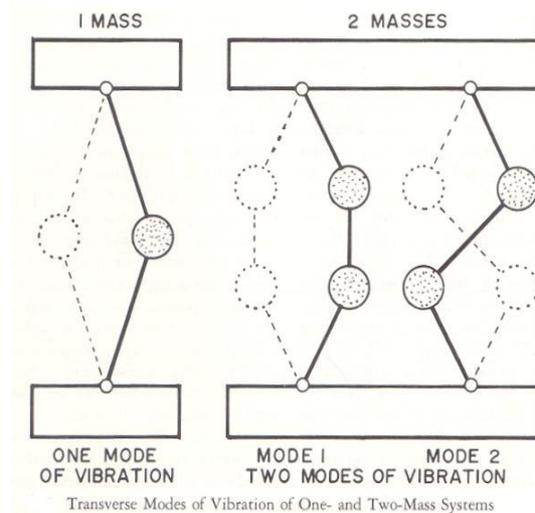


Fig. 13.1 Modi trasversali di vibrazione di sistemi a una o due masse (Benade)

Nel sistema a due masse, per il modo 1 le due masse si muovono in fase secondo un movimento sinusoidale e per il modo 2 le due masse si muovono sempre in direzioni opposte. Va notato che delle 3 molle, nel modo 1, quella centrale è meno tesa di quelle inclinate ai lati rispetto al modo 2. Per questo motivo si può affermare che il grado di rigidità è minore nel modo 1 che nel modo 2 ovvero che la frequenza del modo 2 è circa  $\sqrt{3}=1.732$  più elevata del modo 1. Questa difformità di tensione dovuta principalmente all'estrema semplificazione del modello si riduce mano a mano che cresce il numero di masse distribuite uniformemente. Ad esempio, per un sistema a 3 masse, sono possibili 3 diversi modi di vibrazione: il secondo modo vibra ad una frequenza che è 1.847 volte il primo ed il terzo ad una frequenza 2.41 volte il primo (fig. 14.1)

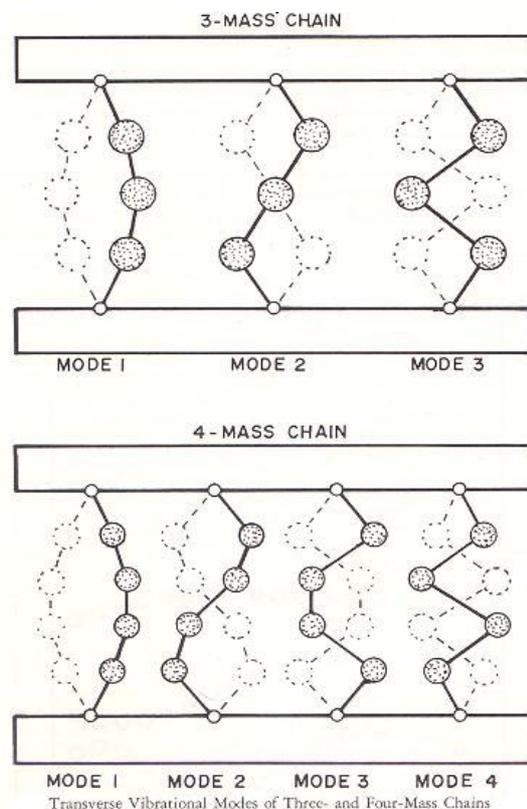


Fig. 14.1 Modi trasversali di vibrazione di sistemi a tre o quattro masse (Benade)

In generale, in un sistema fisico costituito da masse collegate da molle elastiche è possibile prevedere la frequenza naturale di oscillazione sia dei modi longitudinali che di quelli trasversali. Ad esempio, indicando con  $K$  la costante elastica della molla con  $m$  la massa, per un sistema come quello di figura 15.1 la frequenza naturale per oscillazioni longitudinali vale ( fig. 15.1 a):

$$f_i = \frac{1}{(2\pi)} \sqrt{2 \frac{K}{m}}$$

Se la deflessione verticali  $y$  è sufficientemente piccola la frequenza naturale per oscillazioni trasversali vale ( fig. 15.1 b) praticamente la stessa quantità:

$$f_i = \frac{1}{(2\pi)} \sqrt{2 \frac{K}{m}}$$

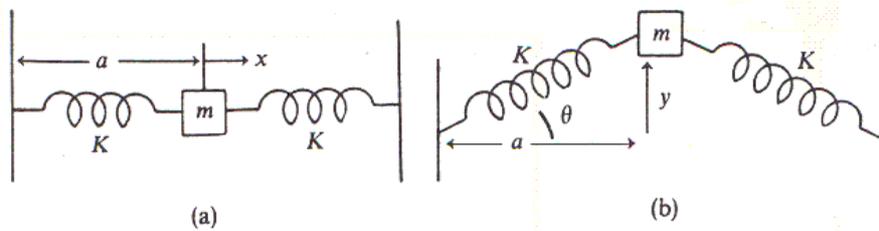


Fig. 15.1 Modi longitudinali e trasversali di vibrazione di un sistema massa-molla (Fletcher-Rossing)

Un sistema come quello mostrato in figura 15.1 è in grado di oscillare in una sola configurazione che rappresenta appunto il modo 1 (cfr. la parte sinistra della figura 13.1). Se, come si è già visto, il numero di masse aumenta, i modi di vibrazione aumentano nella stessa misura.

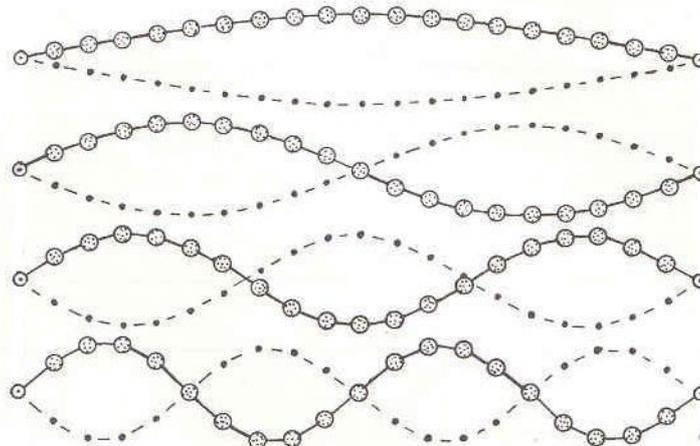


Fig. 16.1 Primi 4 modi di vibrazione trasversali di un sistema con 19 masse omogenee (Benade)

Una corda omogenea, ancorata a due estremi rigidi, di sezione molto minore della sua lunghezza è il limite a cui tende questo sistema quando il numero delle masse diventa infinitamente grande, come è possibile vedere in figura 17.1.

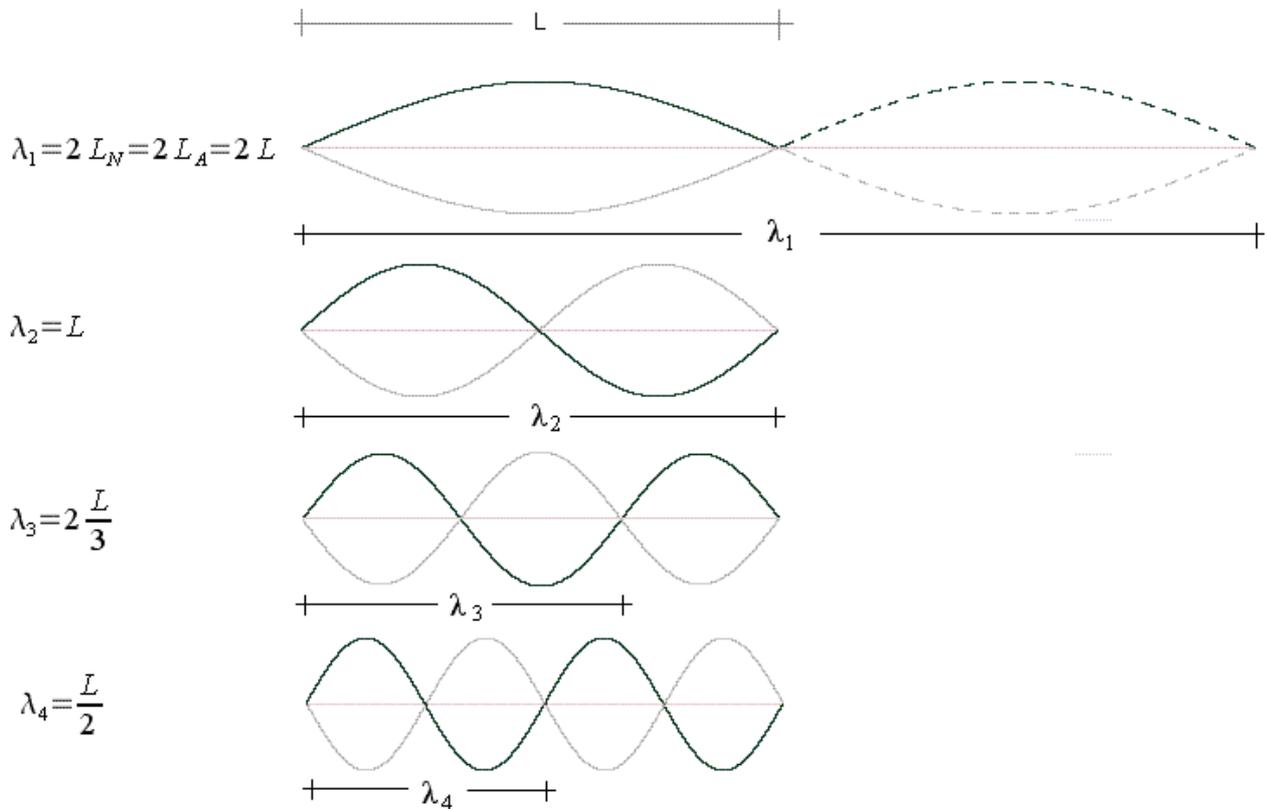


Fig. 17.1 Primi 4 modi di vibrazione trasversale in una corda di lunghezza  $L$  fissata a due estremità

Se si tiene conto della relazione che lega la lunghezza d'onda con la distanza nodale in un'onda stazionaria, è possibile ricavare per ogni modo il valore di  $\lambda$  in funzione della lunghezza della corda. Si avrà allora che:

$$\lambda_1 = 2 L_N = 2 L_A = 2 L$$

$$\lambda_2 = L$$

$$\lambda_3 = 2 \frac{L}{3}$$

$$\lambda_4 = \frac{L}{2}$$

In generale si avrà:

$$\lambda_n = 2 \frac{L}{n}$$

cioè che la lunghezza d'onda del modo  $n$ -esimo è dato dal rapporto tra il doppio della lunghezza della corda diviso il valore di  $n$ .

Dalle relazioni precedenti è facile dimostrare che, indicata con  $\lambda_1$  la lunghezza d'onda del primo modo di vibrazione si ha che:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 2\lambda_1 \\ \lambda_3 &= 3\lambda_1 \\ \lambda_4 &= 4\lambda_1 \\ \lambda_n &= n\lambda_1\end{aligned}$$

Poichè la frequenza di vibrazione è data dal rapporto tra la velocità di propagazione dell'onda e la sua lunghezza d'onda secondo la relazione:

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

si avrà per ciascun modo:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2} \quad f_3 = \frac{v}{\lambda_3} \quad f_4 = \frac{v}{\lambda_4}$$

e quindi conseguentemente:

$$f_2 = 2f_1, \quad f_3 = 3f_1, \quad f_4 = 4f_1 \quad \dots \quad f_n = nf_1$$

In definitiva, le frequenze superiori al modo 1 (modo fondamentale) si ottengono mediante la semplice relazione:

$$f_n = nf_1$$

Se si conosce il valore di tensione della corda  $T$  e la sua densità di massa  $\mu$  è possibile calcolare la frequenza di vibrazione del modo n-esimo attraverso la seguente relazione:

$$f_n = \frac{n}{(2L)} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

con  $n=1,2,3,4,\dots$

Il calcolo della frequenza dei modi può quindi essere eseguito tenendo conto che la tensione di una corda di lunghezza  $L$ .

Se ci riferiamo ai dati dell'esempio riportato alla fine del paragrafo 1.3, una corda metallica di acciaio di 0.9 mm di diametro, sottoposta ad una tensione di 700 N forniva una velocità di propagazione trasversale di 376 m/s. Se ipotizziamo in tali condizioni una lunghezza di 125 centimetri (1.25 m), la frequenza nominale del modo 1 (fondamentale) risulta essere:

$$f_1 = \frac{376}{(2L)} = \frac{376}{2.5} = 150 \text{ Hz}$$

Le frequenze dei modi superiori al primo saranno quindi  $n \cdot 150$  con  $n=1,2,3,\dots$

## 1.6 Configurazione spaziale di una corda e modi di vibrazione

I modi di vibrazione possibili per una corda ideale di lunghezza  $L$  sono teoricamente infiniti. Ma l'aspetto più interessante è legato al fatto che tali modi di vibrazione coesistono in proporzione diversa contemporaneamente. Infatti occorre tener presente che la vibrazione una corda viene generalmente prodotta da meccanismi che operano sulla un qualche particolare tipo di deformazione iniziale. Per esempio. Il modo più semplice di porre in vibrazione una corda è quello mostrato in figura 18.1, assimilabile, in forma volutamente accentuata, al meccanismo adottato negli strumenti "a corde pizzicate" .

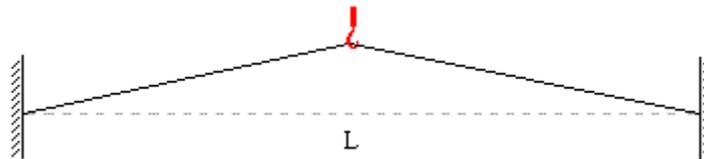


Fig. 18.1 Deformazione iniziale di una corda per effetto di una trazione verticale (corda pizzicata)

Si può dimostrare abbastanza semplicemente che la configurazione iniziale della corda è ottenibile dalla sovrapposizione algebrica di tutti i modi possibili di vibrazione. A tale risultato si può pervenire attraverso due strade: la prima prevede l'impiego dell'espansione in serie di Fourier (analisi in frequenza) mentre la seconda si avvale di ragionamenti intuitivi basati sull'composizione dei moti semplici. Nel primo caso, la figura 18.1 può essere vista come analogia ad un ciclo di un segnale  $s(t)$  periodico di periodo  $T$  rappresentato nel dominio del tempo (fig. 19.1):



Fig. 19.1 Diagramma temporale di un segnale corrispondente per analogia alla deformazione di figura 18.1

Applicando la serie di Fourier, il segnale  $s(t)$  può essere rappresentato come:

$$s(t) = \sum_n A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

dove  $n=1,2,3, \dots$

$$\omega = 2\pi f = 2\frac{\pi}{T} = \text{frequenza fondamentale}$$

$A_n = \text{ampiezza della componente } n\text{-esima}$

$\varphi_n = \text{fase della componente } n\text{-esima}$

Nel caso in esame, la geometria triangolare del segnale produce una serie di componenti sinusoidali secondo lo schema mostrato in figura 20.1

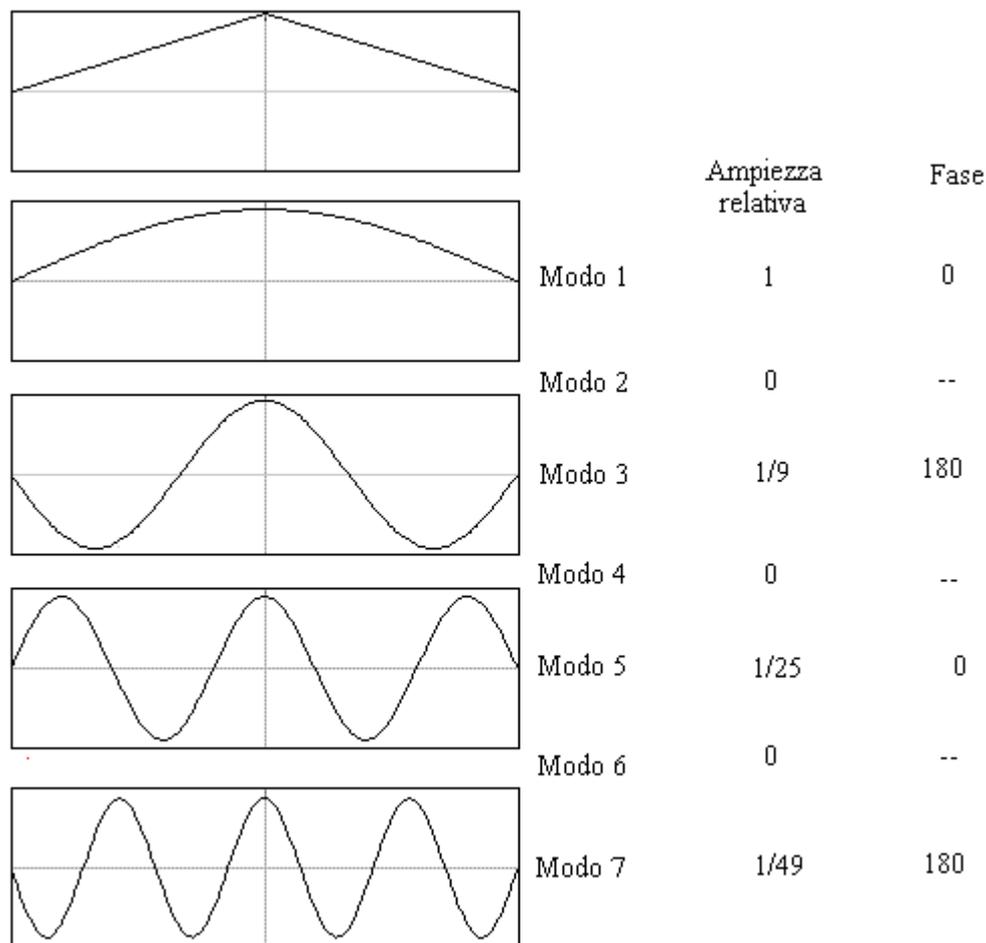


Fig. 20.1 Analisi frequenziale di una corda pizzicata nel suo punto centrale

Nel caso mostrato in figura 20.1, l'analisi di Fourier mostra che se la corda è pizzicata nel suo punto centrale, i modi che contribuiscono alla vibrazione complessiva sono solo quelli dispari, con proporzioni di ampiezza e valori di fase riportati a lato della figura stessa.

Si noti che per ottenere la configurazione iniziale, le ampiezze sono scalate secondo il termine

$$\frac{1}{(n^2)}$$

con  $n=1,3,5,\dots$  mentre le fasi sono alternativamente 0 e 180 gradi.

Oltre all'analisi di Fourier è possibile dimostrare come, data una forma iniziale di un sistema di masse e molle disposte uniformemente, esiste sempre una configurazione di modi che sommati tra di loro sono in grado di comporre tale forma, così come si vede nel caso di figura 21.1.

L'impiego del sistema a masse e molle permette di arrivare allo stesso risultato attraverso semplici considerazioni di carattere geometrico ma attraverso un ragionamento più semplificato e in generale più intuitivo.

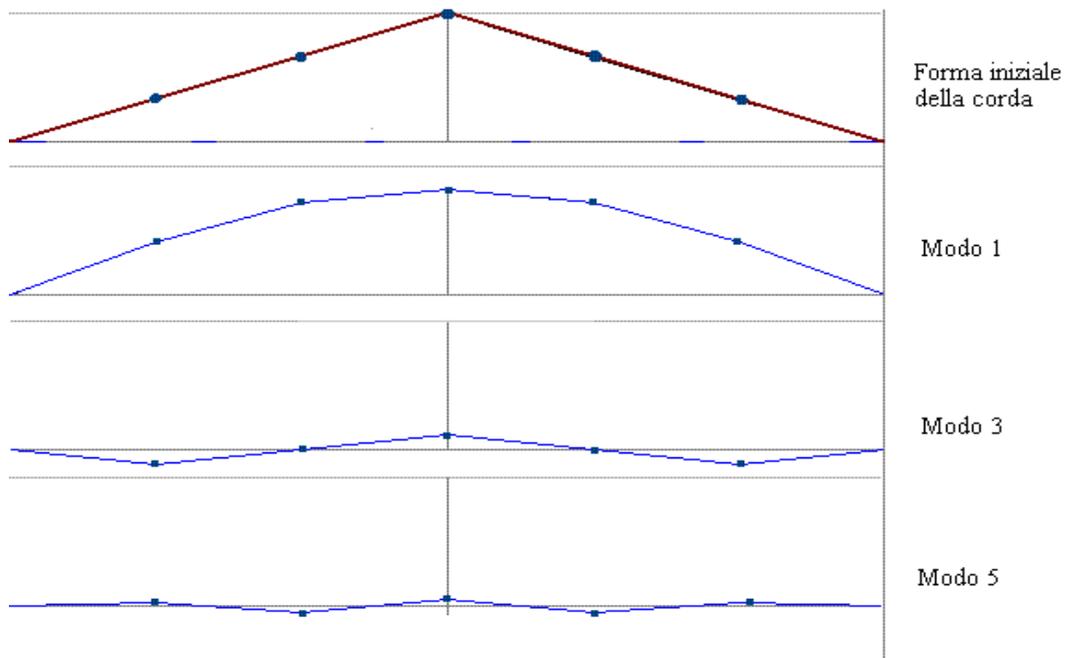


Fig. 21.1 Composizione dei modi di vibrazione per una data forma iniziale

L'analisi delle figure 20.1 e 21.1 mostrano entrambe che i modi pari (2,4,6...) non contribuiscono affatto alla deformazione iniziale della corda. Ciò è dovuto al fatto che la corda è stata pizzicata nel suo punto di mezzo, ad una distanza  $L/2$ : in corrispondenza a tale punto, le onde stazionarie relative ai modi pari presentano quindi un nodo di vibrazione mentre i modi dispari (1,3,5,...) oscillano liberamente, ciascuno con la sua frequenza e con la sua ampiezza. Questo comportamento può essere generalizzato nel modo seguente:

*<< quando una corda di lunghezza  $L$  viene posta in vibrazione a  $L/n$  (con  $n < L$ ), sono inibiti tutti i modi che in tale punto presentano un nodo >>*

Ad esempio, se una corda viene pizzicata ad  $1/5$  della sua lunghezza saranno nulli tutti i modi multipli interi di 5, vale a dire 5, 10, 15, 20... In figura 22.1 è mostrato lo spettro di vibrazione.

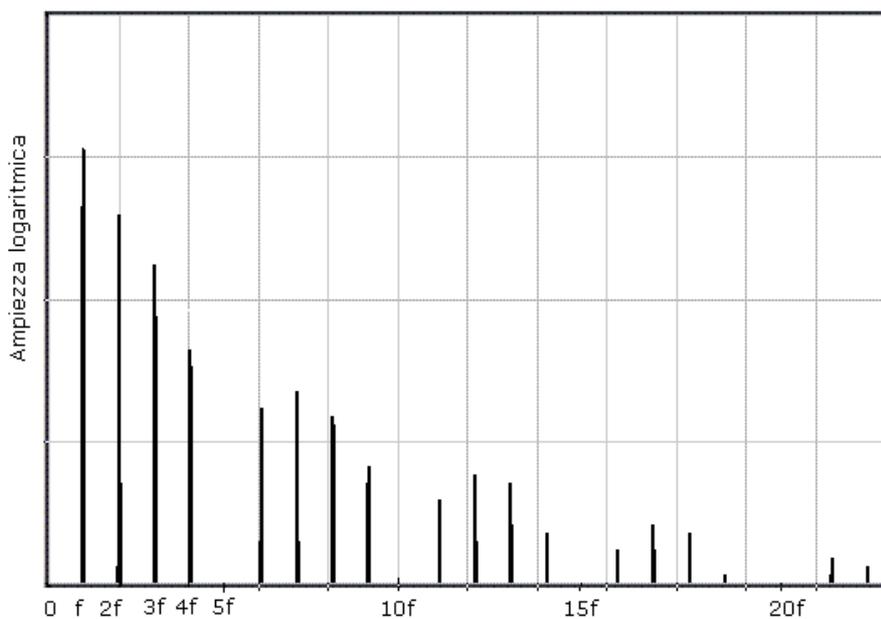


Fig. 22.1 Spettro di una corda pizzicata ad  $1/5$  della sua lunghezza

Lo stesso caso di figura 22.1 può essere visto geometricamente attraverso la rappresentazione dei relativi modi di vibrazione (fig. 23.1):

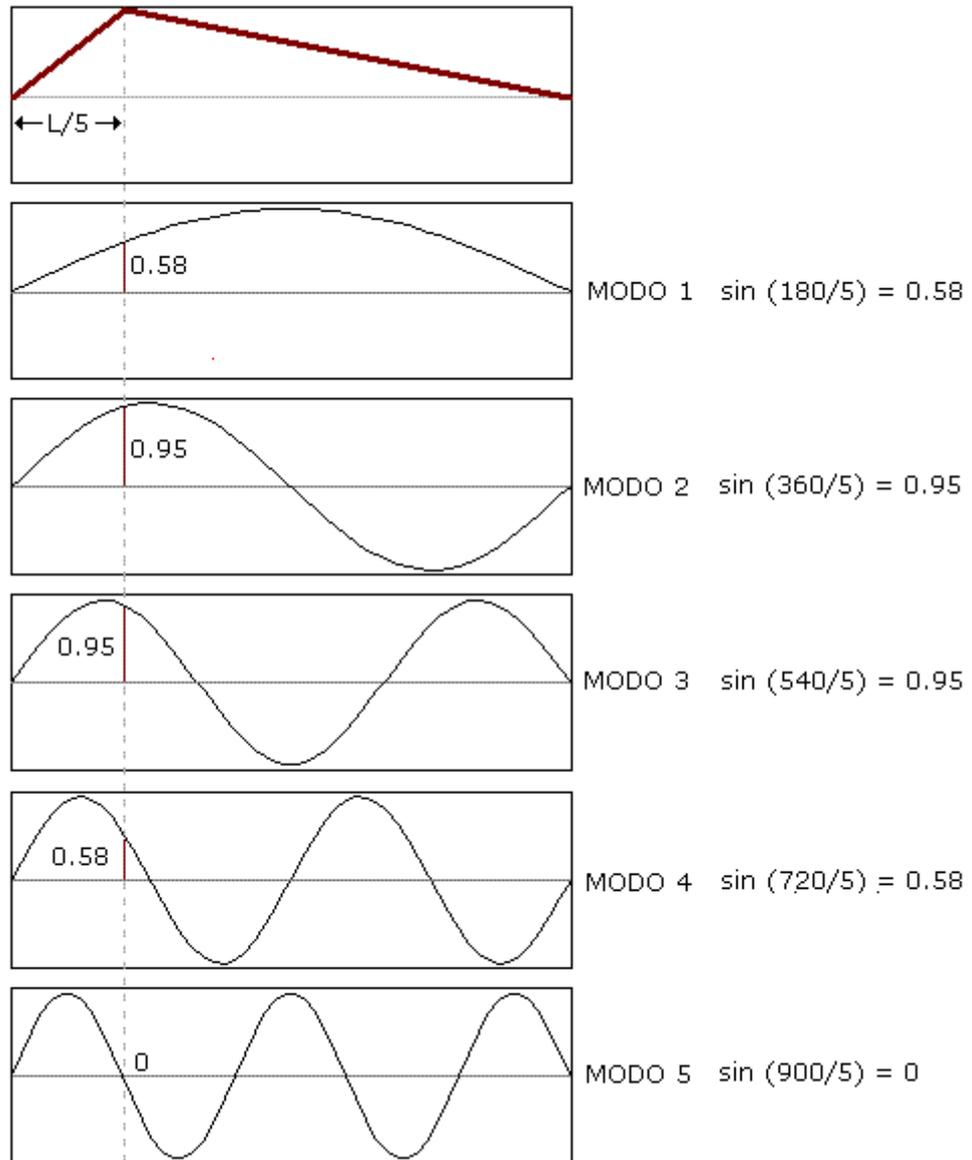


Fig. 23.1 Spettro di una corda pizzicata ad 1/5 della sua lunghezza

Nella figura 23.1, sono evidenziate nella parte destra i valori dell'ampiezza normalizzata di ciascun modo corrispondenti al punto in cui la corda viene pizzicata, cioè ad 1/5 della lunghezza ed inoltre si può notare che il modo 5 non può formarsi perchè presenta un nodo in tale punto.

Benade suggerisce un metodo semplice per ottenere la “ricetta di vibrazione” nel caso delle corde pizzicate, ovvero per quantificare l'entità di ciascuna componente in termini d'ampiezza. Per fare ciò è sufficiente utilizzare i valori d'ampiezza e dividere ciascun valore per il quadrato del numero corrispondente al modo ( $n^2$ ) ed eventualmente rinormalizzare il risultato. Ciò è riassunto nella tabella 1.1:

**Tabella 1.1**

	1	2	3	4	5
Ampiezza Normalizzata Modo	0,5877	0,9510	0,9510	0,5877	0,0000
$n^2$	1	4	9	16	25
Ampiezza Modo / $n^2$	0,5877	0,2377	0,1056	0,0367	0,0000
(Ampiezza Modo / $n^2$ )/0,5877	1,0000	0,4044	0,1900	0,0625	0,0000
dB	0,0	-7,8	-14,4	-24,0	$-\infty$

Attraverso il calcolo dei coefficienti di Fourier si perviene al medesimo risultato (a meno di una costante inessenziale) attraverso la seguente formula generalizzante:

$$Ampiezza\ Modo_{(n-esimo)} = \frac{(25h)}{(2n^2\pi^2)} \sin \frac{(n\pi)}{5}$$

dove :

$h$  = altezza della corda ad 1/5 della sua lunghezza

$n$  = indice di modo

Ciascun modo vibra con la sua frequenza e ampiezza relativa; la somma di queste vibrazioni produce la forma iniziale della corda, a meno di perdite energetiche. La forma assunta dalla corda in ogni istante è quindi il frutto di una complessa interferenza di onde stazionarie che vibrano concorrentemente. In ogni caso, l'analisi del moto di una corda che vibra a partire da una certa configurazione iniziale può essere eseguita immaginando che nella corda stessa si propagano in direzioni opposte, due impulsi di forma identica alla configurazione iniziale, come mostrato in figura 24.1

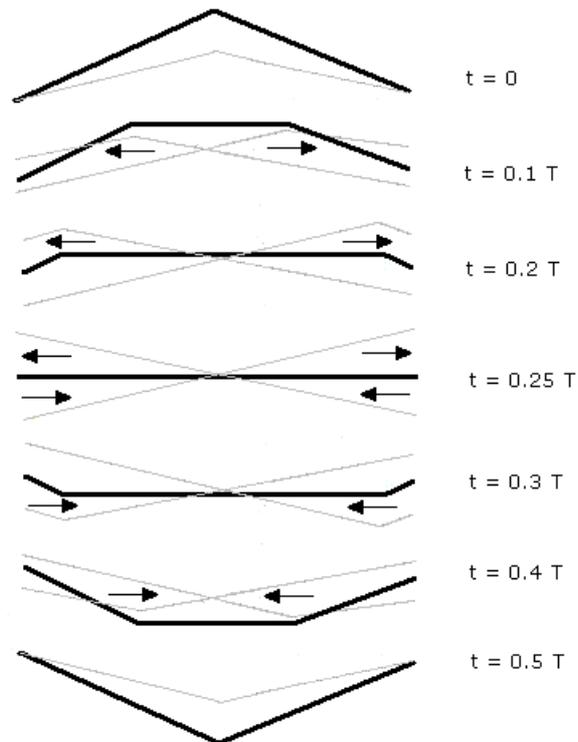


Fig. 24.1 Analisi temporale del moto di una corda pizzicata nel centro

In ogni caso, lo studio del moto vibrazionale di una corda può essere ricondotto ad un'equazione differenziale che risolta (note le condizioni iniziali) fornisce le funzioni che ne descrivono completamente il comportamento. Tale equazione risulta essere:

$$\frac{(\partial^2 y)}{(\partial^2 t^2)} = v^2 \frac{(\partial^2 y)}{(\partial^2 x^2)}$$

dove:

$y$  = spostamento verticale della corda

$x$  = coordinata misurata lungo l'asse longitudinale

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  = velocità di propagazione

$T$  = tensione

$\mu$  = massa per unità di lunghezza

Un'importante conseguenza collegata al meccanismo di cancellazione dei modi che presentano un nodo nel punto di sollecitazione della corda, è quella che riguarda la possibilità di controllare il timbro prodotto dalla corda stessa. Negli strumenti a corde pizzicate, l'esecutore è in grado di controllare la qualità spettrale del timbro attraverso la posizione nella quale la corda viene messa in vibrazione. In figura 25.1 sono riportati gli spettri relativi a cinque diverse configurazioni iniziali, rispettivamente a  $1/20$ ,  $1/5$ ,  $1/4$ ,  $1/3$  e  $1/2$   $L$ .

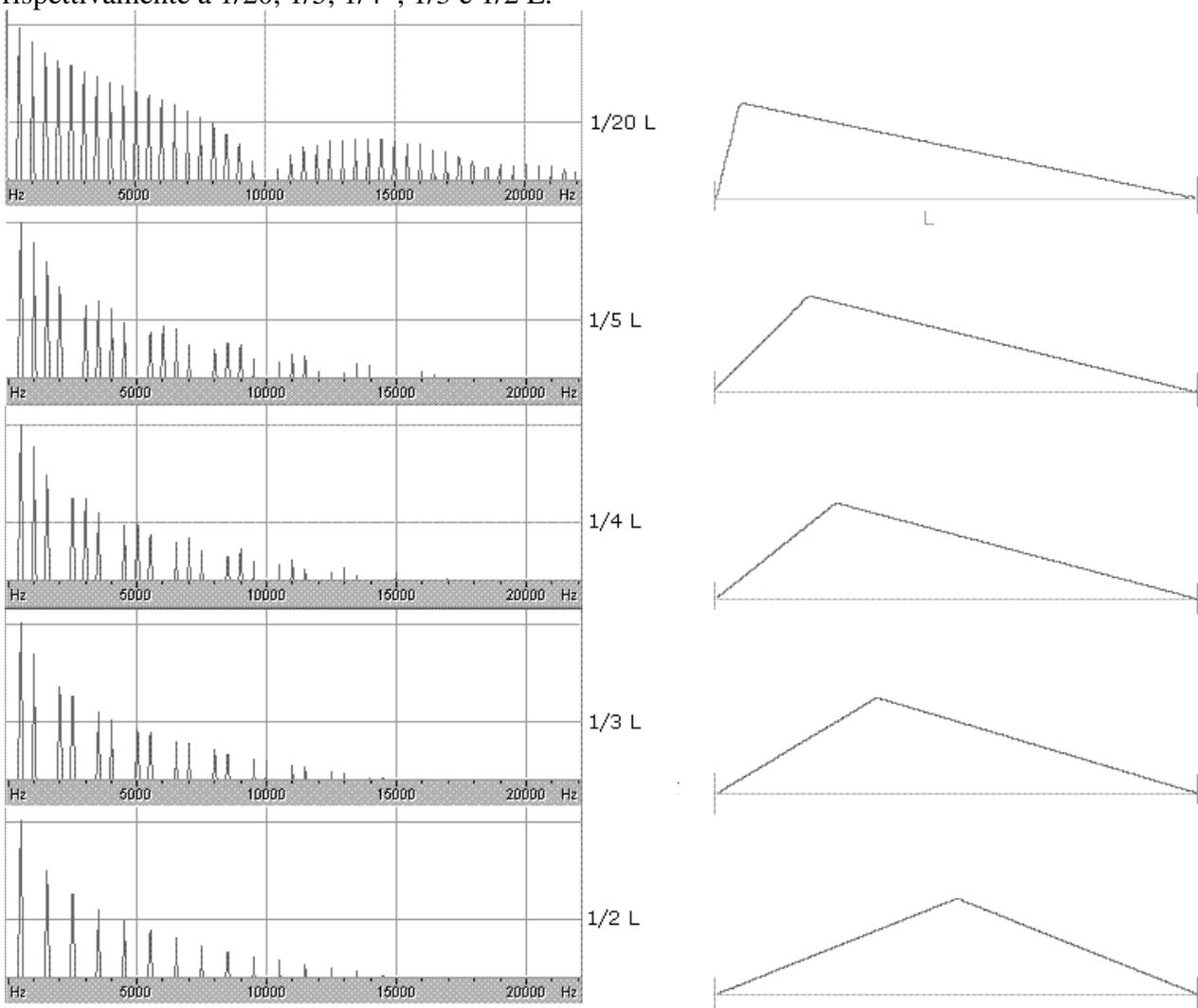


Fig. 25.1 Spettri di vibrazione di un corda relativi a varie punti di sollecitazione

Dagli spettri di figura 25.1 si può vedere la mancanza di componenti corrispondenti al numero che definisce il punto di sollecitazione della corda: rispettivamente 20, 5, 4, 3, 2 e i relativi multipli. Mano a mano che si procede verso il centro della corda, lo spettro è sempre meno esteso e con una dominanza timbrica verso la zona della fondamentale fino al caso ( $L/2$ ) in cui il numero delle componenti viene dimezzato. Viceversa, quando la corda viene sollecitata verso un estremo ( $L/20$ ), lo spettro è molto esteso e con pochi vuoti: ciò produce una sonorità più chiara e metallica.

In altre strumenti a corda come il pianoforte e il clavicembalo, il punto di sollecitazione non può essere modificato a piacere dall'esecutore, ma solo in misura molto limitata in sede di taratura e di messa a punto dello strumento. In ogni caso, tale principio è sfruttato in una certa misura anche nel pianoforte. Infatti, il punto di percussione del martello sulla corda viene abitualmente posto tra  $1/7$  e  $1/9$  della sua lunghezza impedendo o riducendo i modi compresi tra il settimo e il nono perchè tali valori coincidono con valori intervalli musicali proporzionali alla settima minore e alla nona che sono considerati i più dissonanti tra i primi 10.

## 1.7 Vibrazione di colonne d'aria

I principi fisici che regolano la vibrazione delle corde possono in qualche modo essere estesi, con le dovute differenziazioni, al caso della vibrazione di colonne d'aria all'interno di tubi. E' il caso degli strumenti a fiato (*wind instruments*) e delle canne d'organo. A prescindere dai meccanismi primari d'eccitazione, l'analogia con la vibrazione nella corde è limitata a quella parte che in tali strumenti è rappresentata dal *tubo risonante*. Ciò dipende dal fatto che per produrre le onde stazionarie è necessario disporre di un vero e proprio sistema vibrante autonomo, una sorta di "motorino d'avviamento" mentre nelle corde è sufficiente produrre una deformazione iniziale (pizzico o impulso) per produrre oscillazioni stabili. Un caso particolare negli strumenti a corda è rappresentato dagli strumenti ad arco, nei quali la vibrazione è indotta da un sistema (l'archetto) che produce in sè un'oscillazione periodica. Nei tubi risonanti, la vibrazione stazionaria che si produce al loro interno è sostenuta dall'oscillazione delle particelle d'aria in essi contenute. La differenza più importante rispetto al caso delle corde è che l'onda stazionaria è di tipo longitudinale.

In generale, nell'aria si parla di onde longitudinali ovvero compressioni e rarefazioni delle molecole sottoposte ad una qualche sollecitazione che di fatto rappresentano le onde di pressione. La misura della compressione/rarefazione è riferita alla pressione atmosferica ambiente ed è misurata in Pascal o nei suoi sottomultipli. In campo libero, cioè in uno spazio privo di ostacoli le onde di pressione si propagano in tutte le direzioni, secondo una geometria sferica. Considerando per semplicità solo una particolare direzione di propagazione, in figura 26.1 sono rappresentati il diagramma della pressione in un onda sonora che si propaga ed il moto oscillatorio (locale) delle molecole.

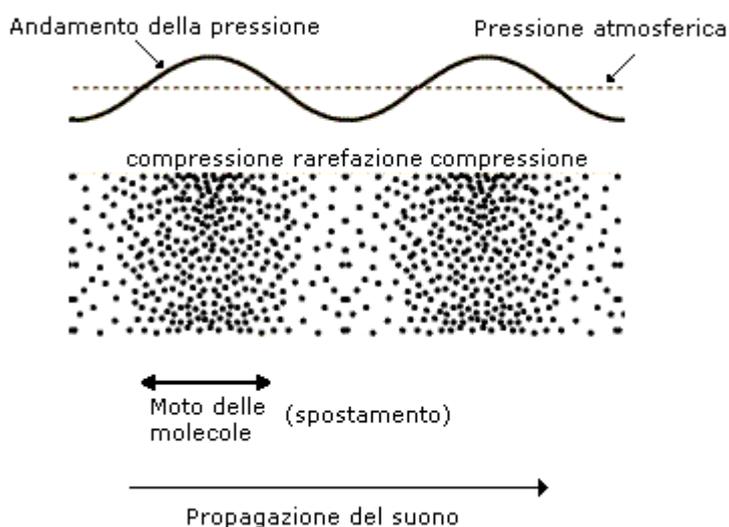


Fig. 26.1 Diagramma della pressione e dello spostamento in un onda sonora

Quando, sotto particolari condizioni, si analizza il comportamento della colonna d'aria circoscritta all'interno di un tubo, quest'ultimo si comporta come un risonatore. Benchè in questa sezione non ci occuperemo del meccanismo di eccitazione, illustreremo i meccanismi relativi alle onde stazionarie che in essi possono generarsi nei tubi risonanti.

Il primo caso esaminato è quello relativo al comportamento di un tubo cilindrico di lunghezza  $L$  aperto a entrambe le estremità. Si fa l'ipotesi che la sezione (appunto cilindrica) sia costante e che la sua lunghezza sia molto maggiore della sua sezione. Ciò equivale a considerare il sistema un tubo risonante ideale. In queste condizioni, le *due estremità rappresentano nodi di pressione o alternativamente antinodi di spostamento*, così come evidenziato nella figura 27.1

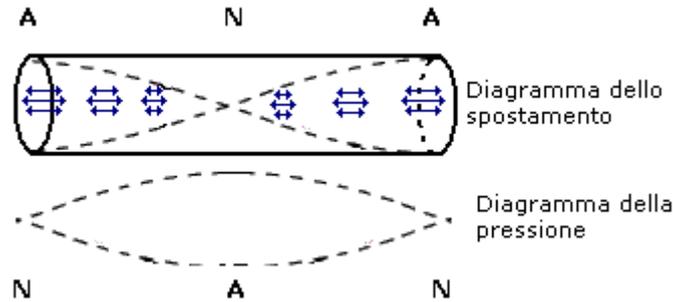


Fig. 27.1 Diagramma della pressione e dello spostamento

Dall'analisi di figura 27.1 si osserva che le estremità aperte sono sempre antinodi di spostamento (massimo spostamento delle molecole) e viceversa, tali estremità sono sempre nodi di pressione (minimi di pressione). In sostanza, l'interno del tubo (che può essere a tutti gli effetti considerato un mezzo unidimensionale elastico) consente la propagazione di onde longitudinali. In ogni punto all'interno, la pressione può oscillare anche in modo considerevole rispetto alla pressione atmosferica esterna e ciò è dovuto all'effetto di controbilanciamento delle pareti rigide interne. Le variazioni di pressioni assumono il loro valore minimo in corrispondenza delle aperture le quali sono in grado di riflettere la perturbazione che si è propagata all'interno. In conseguenza di ciò, il comportamento è analogo a ciò che avviene in una corda tesa tra due estremità fisse. In quel caso, i supporti fungono da nodi di spostamento mentre nel caso dei tubi rappresentano nodi per la pressione. In ogni caso i modi di vibrazioni sono quelli che si ottengono attraverso la ripartizione aliquota della colonna d'aria compresa tra le due aperture.

In figura 28.1 sono mostrati gli andamenti dei diagrammi di pressione e spostamento relativamente ad un tubo aperto di lunghezza  $L$  e ad un tubo di stessa lunghezza ma chiuso ad una estremità.

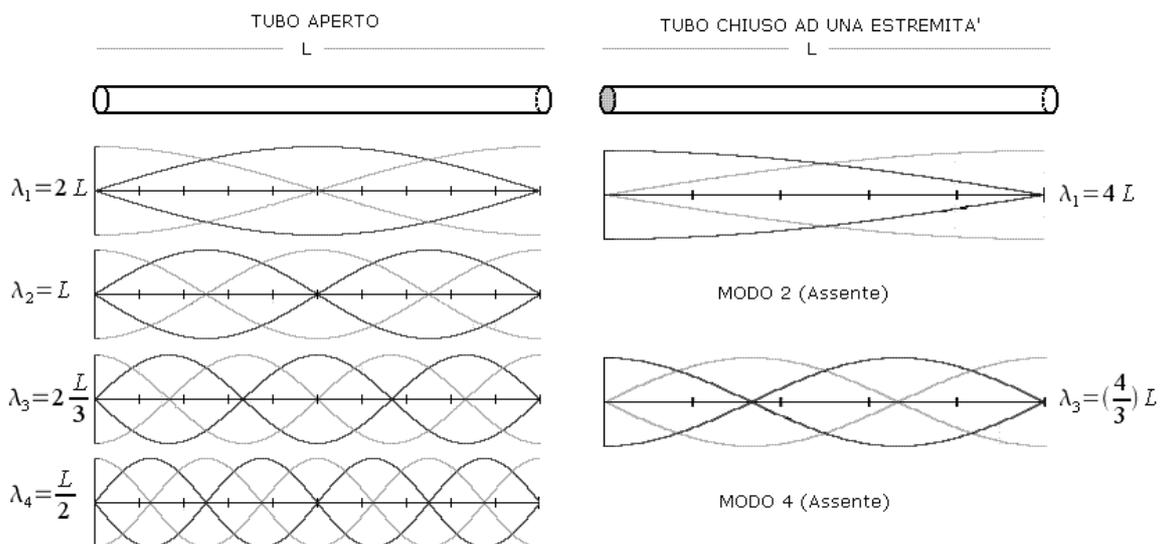


Fig. 28.1 Modi di vibrazione in un tubo totalmente aperto e chiuso ad una estremità

Come si può facilmente verificare dalla figura 28.1, i modi di vibrazioni per il tubo totalmente aperto sono gli stessi che si sono trovati nel caso della corda tesa tra due estremità. Conoscendo la velocità di propagazione longitudinale, è possibile identificare la frequenza teorica dei vari modi di vibrazione. Analogamente a quanto avviene per i mezzi materiali, la velocità di propagazione di un'onda longitudinale in un gas è data dalla relazione:

$$V_L = \sqrt{\frac{p}{\delta}} \quad (m/s)$$

dove:

$p = \text{pressione} \quad (\text{Newton}/m^2)$

$\delta = \text{densità} \quad (kg/m^2)$

Poiché in un gas ideale il rapporto  $p/\delta$  dipende dalla temperatura assoluta  $t_A$ , sebbene l'aria non sia un gas ideale ma una sua buona approssimazione, la velocità di propagazione di un'onda longitudinale può esprimersi nel seguente modo:

$$V_L = 20.1 \sqrt{273 + t_c}$$

dove:  $t_c = \text{temperatura dell'aria (gradi)}$

Ad esempio, per un tubo cilindrico lungo 1 metro, totalmente aperto, ad una temperatura di 25 °C, i primi 4 modi di vibrazione valgono:

$$V_L = 20.1 \sqrt{273 + t_c} = 20.1 \sqrt{273 + 25} = 346.97 \text{ m/s}$$

Tenuto conto che

$$f_n = \frac{V_L}{\lambda_n}$$

si avrà:

$$f1 = 173.49 \quad f2 = 346.97 \quad f3 = 520.46 \quad f4 = 693.95$$

Nel caso del tubo chiuso ad una estremità, si vede dalla figura 28.1 che in corrispondenza della chiusura avremo sempre un antinodo (massimo) di pressione per cui la lunghezza d'onda del primo modo vale  $4\lambda$  che è esattamente il doppio della lunghezza d'onda del primo modo nel caso del tubo totalmente aperto. Questo fatto implica che, a parità di lunghezza del tubo, la frequenza fondamentale in un tubo cilindrico chiuso ad un'estremità, è esattamente la metà rispetto al tubo completamente aperto. Ciò per esempio viene sfruttato per la costruzione di alcuni registri gravi dell'organo per la quale sarebbero necessarie canne di notevole lunghezza.

Un'altra importante conseguenza derivante dalla chiusura del tubo risiede nel fatto che per la stessa ragione, non si possono formare i modi pari e quindi i modi possibili sono solo quelli dispari, vale a dire 1,3,5,7.....

Tra gli strumenti appartenenti alle famiglie orchestrali, il flauto ed il clarinetto rappresentano in modo più diretto i modelli teorici di tubi cilindrici aperti e chiusi rispettivamente. In effetti nella famiglia dei flauti una delle due aperture coincide con l'imboccatura, mentre la seconda con il primo foro aperto all'altra estremità. Nei tubi acustici, il controllo della frequenza della nota avviene modificando l'effettiva lunghezza del tubo attraverso l'uso diretto di fori laterali o sistemi di leve meccaniche (chiavi) che aprono e chiudono tali fori (figura 29.1). L'azione di un foro laterale è praticamente equivalente ad una reale terminazione aperta del tubo in misura tanto maggiore quanto il diametro del foro si avvicina alla sezione del tubo.

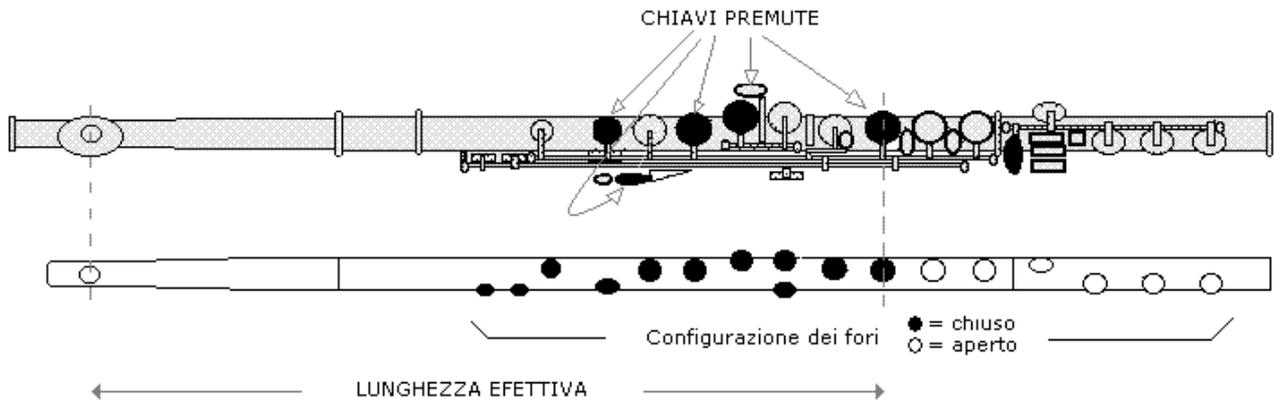


Fig. 29.1 Schematizzazione del funzionamento delle chiavi in un flauto moderno

Un altro importante meccanismo per poter variare la frequenza, soprattutto per superare intervalli di ottava o più, è quello dell'utilizzazione di fori supplementari posti in posizioni strategiche e tali da impedire per esempio la formazione del primo modo di vibrazione. In un tubo cilindrico aperto alle due estremità ciò comporta per esempio il salto di un'ottava poiché alla colonna d'aria viene imposto un nodo di pressione nel punto desiderato.

Si deve far notare come il meccanismo di risonanza in un tubo cilindrico aperto è riscontrabile in un tubo cilindrico chiuso in ambedue le estremità. Naturalmente questa condizione di chiusura non è affatto favorevole per la trasmissione del suono prodotto verso l'esterno così che gli strumenti musicali hanno sempre una o due aperture agli estremi.

Ad esempio, la famiglia dei clarinetti è la realizzazione pratica di un tubo cilindrico chiuso ad una estremità. A differenza del flauto, dove l'imboccatura ha una luce di notevoli dimensioni, nel clarinetto la produzione di onde stazionarie avviene attraverso la messa in vibrazione di un'ancia eccitata da un flusso d'aria turbolento. Come si può vedere dallo schema di figura 30.1, l'ancia si apre e si chiude velocemente lasciando una luce molto piccola così che in tale punto il tubo può considerarsi chiuso.

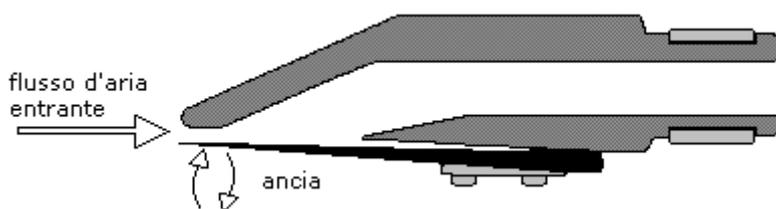


Fig. 30.1 Schematizzazione del funzionamento delle chiavi in un flauto moderno

Anche nel clarinetto, che produce soprattutto i modi di vibrazione dispari, la produzione di note più acute è possibile grazie ad un foro addizionale (porta voce) che ha la funzione di forzare nella colonna d'aria un nodo di pressione. Data l'asimmetria del tubo (chiuso-aperto), il salto di frequenza avviene non sul secondo armonico non può formarsi (ottava) bensì sul terzo (dodicesima o ottava + quinta).

Oltre alle due tipologie di tubo cilindrico, aperto e chiuso, completano il quadro degli strumenti a fiato (wind instrument o "legni") quelli basati su un tubo chiuso ad un'estremità, ma di geometria conica. Appartengono a questa categoria il sassofono, l'oboe e il fagotto. L'eccitazione primaria è ancora fornita da un'ancia che nel sassofono è semplice o battente (come nel clarinetto) mentre

nell'oboe e nel fagotto è doppia. L'ancia doppia è formata da due linguette di canna sottile, legate insieme ad una estremità permettendo però il passaggio dell'aria in una adeguata fessura. Nei tubi a geometria conica lo studio dei modi di vibrazione è reso più complesso dalla sezione che varia linearmente con la lunghezza. In generale, un tubo conico, o al più a tronco di cono, chiuso ad un'estremità è in grado di produrre tutti i modi, sia quelli pari che quelli dispari anche se le singole componenti hanno una forma che può essere rappresentata da funzioni meno semplici delle sinusoidi vale a dire le funzioni  $(\sin x)/x$  come rappresentato schematicamente in figura 31.1.

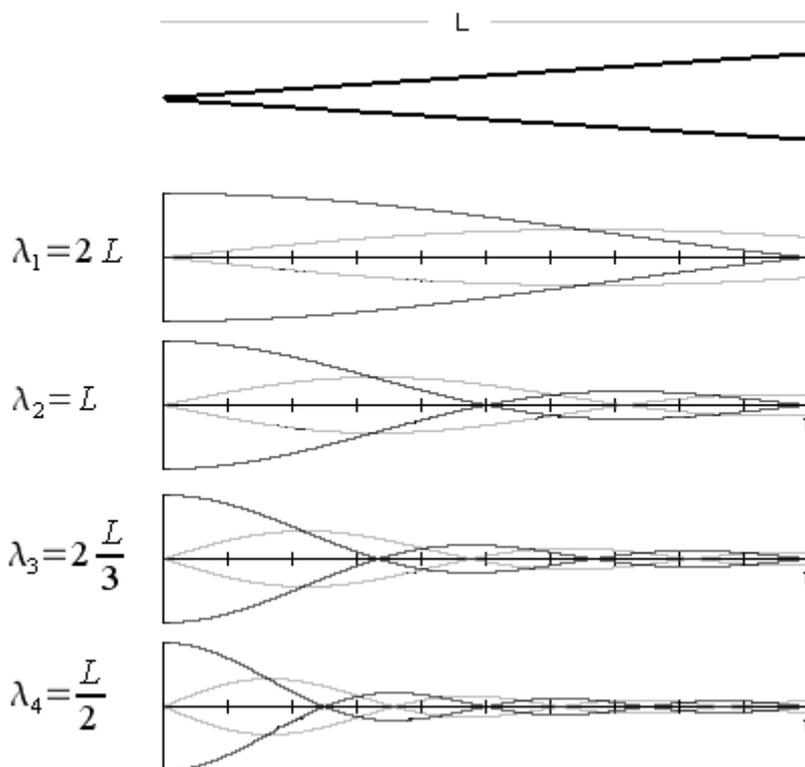


Fig. 31.1 Modi di vibrazione in un tubo conico chiuso ad un'estremità

Come si può evincere dalla figura, nell'apice del cono la pressione presenta sempre un antinodo (massimo) e la colonna d'aria si ripartisce in lunghezza in parti aliquote. Le funzioni  $(\sin x)/x$  sono le uniche che permettono di ripartirsi aliquotamente ma con un massimo nel punto corrispondente all'origin. In quel punto infatti, le sinusoidi sono sempre nulle quindi non sono in grado di rappresentare correttamente la geometria dei modi possibili. In figura 32.1 sono messi a confronto i primi due modi di vibrazione di un tubo cilindrico con un tubo conico. Come si può vedere, la non uniformità della sezione deforma la colonna d'aria sebbene non sia in grado di modificare il comportamento agli estremi o eventualmente tra l'apice (imboccatura, ancia) e il primo foro aperto. Nel secondo modo, dove il fenomeno è molto più marcato, la deformazione "spinge" l'attraversamento della linea di zero più verso l'apertura (foro) riconsentendo la formazione del modo con un rapporto 2/1 rispetto al primo e non viceversa 3/1 come di solito accade con la sezione cilindrica.

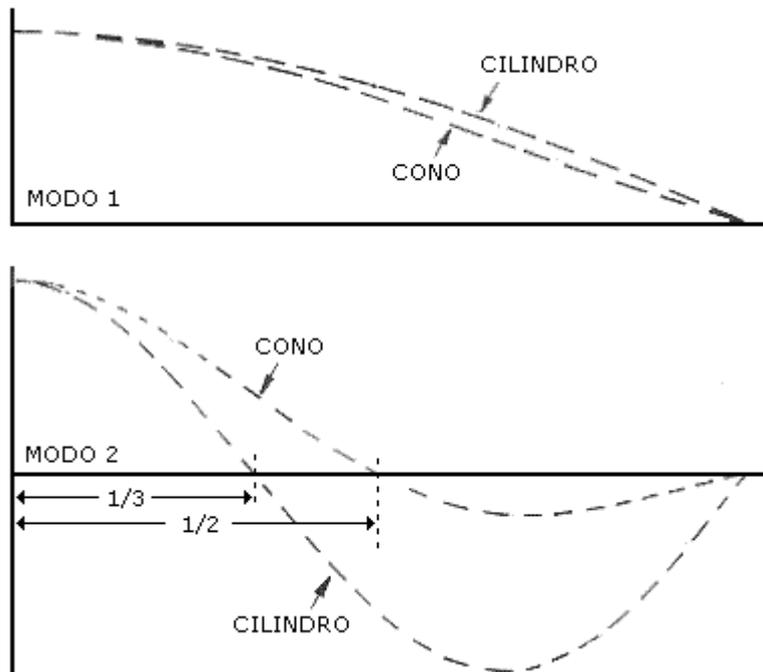


Fig. 32.1 Modi di vibrazione in un tubo conico chiuso ad un'estrmità

In definitiva si può quindi affermare che i risuonatori conici possono produrre tutti i modi di vibrazione e come i risuonatori cilindrici la frequenza fondamentale viene variata modificando la lunghezza effettiva del tubo attraverso i fori laterali.

## 1.8 Vibrazione di membrane

La descrizione dei modelli dei sistemi vibranti così come è stata presentata presuppone che i sistemi fisici ad essi associati siano oscillatori monodimensionali e, nonostante ciò rappresenti una certa semplificazione, non ne viene compromessa la loro comprensibilità. Ciò è vero quando una delle tre dimensioni è predominante rispetto alle altre. Nel caso della corda, per esempio, la lunghezza è certo la dimensione sulla quale si sviluppano quasi tutti i ragionamenti. Quando però, le altre dimensioni non sono più trascurabili, almeno in prima approssimazione, occorre tenerne conto poiché il modello unidimensionale può diventare inadatto a spiegare il loro comportamento: è il caso dei sistemi vibranti bidimensionali come lastre e membrane sui quali sono basati praticamente tutti gli strumenti a percussione. Va detto subito che il modello e i ragionamenti adottati per le corde vibranti non è direttamente applicabile a questi casi sebbene ne siano una naturale estensione. Infatti una membrana può essere pensata come un'estensione a due dimensioni di una corda. Per una membrana rettangolare di dimensioni  $L_x$  e  $L_y$  semplicemente appoggiata a supporti sui 4 lati, di densità superficiale  $\sigma$  ( $Kg/m^2$ ) e sottoposta ad una tensione  $T$ , se ne può descrivere il movimento perpendicolare al piano per ogni punto a partire da un suo elemento infinitesimo di dimensioni  $dx$  e  $dy$  attraverso un'equazione differenziale nelle 3 variabili spaziali ( $x, y, z$ ) e nella variabile temporale  $t$  :

$$T dx dy \left( \frac{(\partial^2 z)}{(\partial x^2)} + \frac{(\partial^2 z)}{(\partial y^2)} \right) = \sigma dx dy \frac{(\partial^2 z)}{(\partial t^2)}$$

Tenendo conto che la velocità di propagazione trasversale è data da  $c = \sqrt{T/\sigma}$  si ottiene una soluzione per la quale i modi di vibrazione risultano essere:

$$f_{nm} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

In pratica, potendo immaginare la superficie della membrana costituita da elementi infinitesimi, i possibili modi di vibrazione sono dati dalla combinazione dei movimenti lungo l'asse  $z$  così come viene illustrato in figura 33.1.

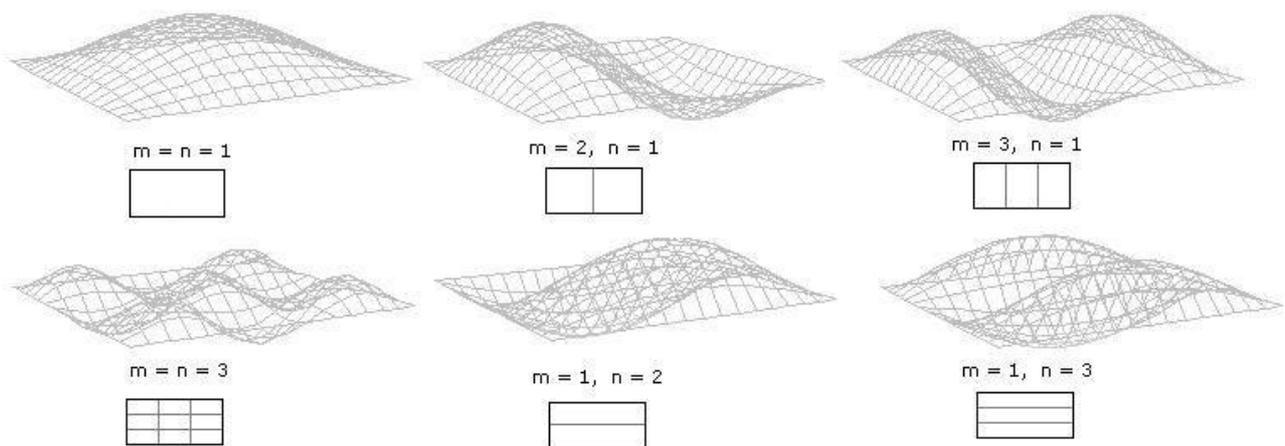


Fig. 33.1 Modi di vibrazione in una membrana rettangolare fissata ai 4 lati

Possiamo rappresentare i modi di vibrazione organizzati secondo una matrice del tipo che segue:

		$m$						
$n$		<b>11</b>	<b>21</b>	<b>31</b>	41	51	62	...
		<b>12</b>	22	32	42	52	62	...
	<b>13</b>	23	<b>33</b>	43	53	63	...	
	14	24	34	44	54	64	...	
	15	25	35	45	55	65	...	
	16	26	36	46	56	66	...	
	...	...	...	...	...	...	...	

I numeri in grassetto rappresentano in questo caso i modi visualizzati nella figura 33.1. Si può osservare che i modi di una membrana possono definirsi *modi di corda bidimensionale*. In sostanza, le onde stazionarie nella direzione  $x$  sono indipendenti dalle onde stazionarie nella direzione  $y$ . La principale differenza rispetto al caso delle corde sta nel fatto che le frequenze dei modi non sono tra loro in rapporto semplice e che quindi, in generale, il suono risultante nella stragrande maggioranza dei casi sarà di tipo *inarmonico*. Inoltre, mentre per le corde si parla di punti nodali, nelle membrane si parla di *linee nodali*. Per merito di questa caratteristica è possibile sperimentalmente evidenziare tali linee come si osserva nel metodo di analisi modale delle *figure di*

Chladni<sup>3</sup> (figura 34.1)

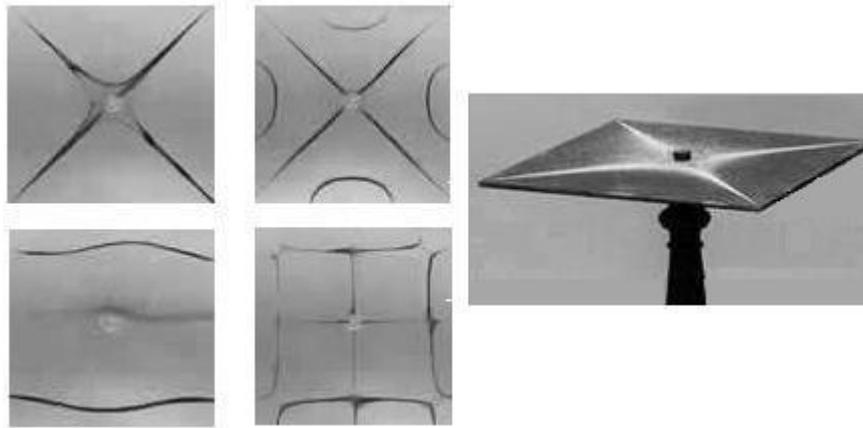


Fig. 34.1 Figure di Chladni (sinistra) e lastra di Chladni (destra)

Quando le dimensioni della membrana sono identiche ( $L_x = L_y$ ) allora i modi  $f_{mm} = f_{nm}$  sono degenerativi poiché hanno le stesse frequenze.

Il caso forse più interessante è rappresentato dalle membrane circolari che trovano larga applicazione in molti strumenti a percussioni (tamburi, timpani, ecc..) anche se lievemente più complesso dal punto di vista matematico. Utilizzando le coordinate polari, si può riscrivere l'equazione d'onda già adottata per le membrane rettangolari. La soluzione sono funzioni di Bessel di ordine  $m$ . Ciascuna di queste funzioni  $J_0(x), J_1(x), \dots, J_m(x)$  si annullano (attraversano la linea di zero) molte volte: l' $n$ -esimo zero della  $J_m(kr)$  fornisce la frequenza dei modi  $(m, n)$ , che ha  $m$  diametri nodali ed  $n$  nodi circolari (incluso quello imposto dal bordo). Nel modo fondamentale (0,1), l'intera membrana si muove in fase.

Per una membrana circolare ideale, la frequenza del modo risonante più grave si ottiene dalla:

$$f_1 = \frac{0.38}{r} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

dove:  $r$  = raggio della membrana

$\sigma$  = massa per unità superficiale ( $\text{Kg/m}^2$ )

$T$  = tensione (Newton/m)

Per esempio, nel caso di un timpano orchestrale, i valori possono essere:

raggio = 0.30, massa =  $0.26 \text{ kg/m}^2$ ,  $T = 2000 \text{ N/m}$ .

Per tali valori si ottiene:

$f_1 = 111 \text{ Hz}$

$f_2 = 1.59 f_1 = 176.49 \text{ Hz}$

$f_3 = 2.13 f_1 = 236.43 \text{ Hz}$

$f_4 = 2.29 f_1 = 254.19 \text{ Hz}$

..

In ogni caso i valori teorici delle frequenze dei modi di vibrazione seguono lo schema rappresentato in figura 35.1.

<sup>3</sup> Ernst Chladni (1756-1827) scienziato tedesco che ha per primo cercato di visualizzare i modi di vibrazione di lastre e membrane deponendo su esse della sabbia e poi ponendole in vibrazione, tradizionalmente con un archetto.

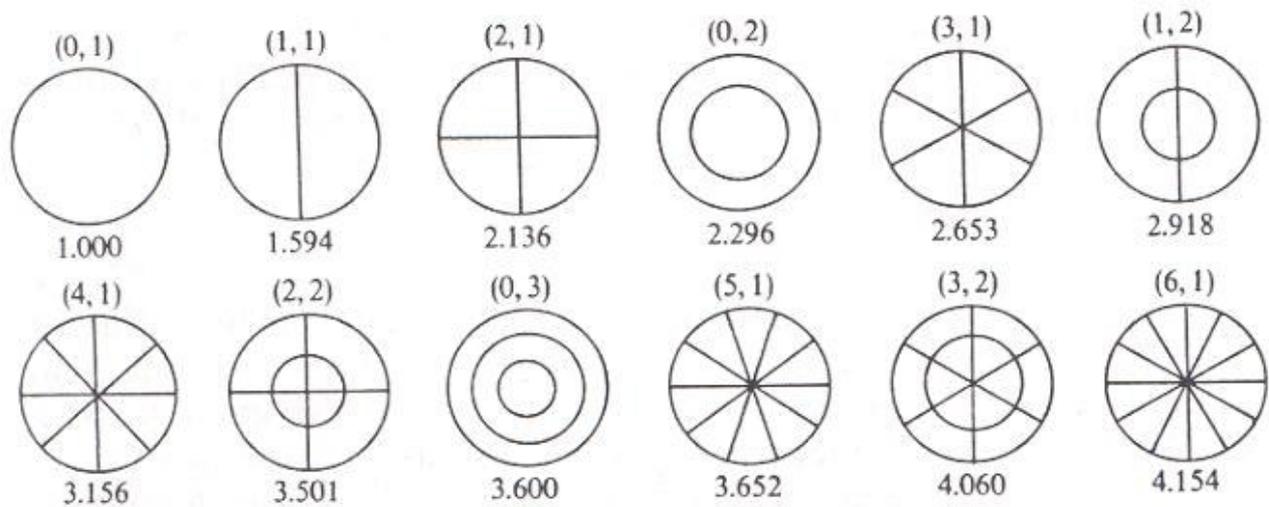


Fig. 35.1 Primi 15 modi di vibrazione di una membrana ideale circolare

In pratica, le frequenze di risonanza sono influenzate principalmente dalla tensione applicata e in parte dalla massa d'aria che agisce sulle facce della membrana. Oltre a ciò, il modo con cui viene regolata la tensione è un fattore di grande importanza per l'ottenimento di particolari modi vibrazione, così come avviene nello strumento indiano della *tabla* che è in grado di produrre suoni con un elevato grado di armonicità.

In molti strumenti a percussione, la membrana è tesa su una cavità che funge da risonatore supplementare e che ha il compito di amplificare il suono primario. Oltre a ciò, la cavità ha la funzione di separare le due facce della membrana così da evitare la compensazione delle onde di compressione/rarefazione e diminuire così per cancellazione gran parte del suono. Sfruttando tale principio, a volte, la seconda membrana può essere omessa per ridurre la radiazione del suono che di fatto viene riflessa nella cavità con meno efficienza.

Anche nelle membrane, il punto di eccitazione segue il principio per cui in tale regione si viene a creare un massimo (antinodo). Suonando più verso il centro viene favorito il modo fondamentale e poche parziali significative mentre spostandosi verso i bordi lo spettro tende ad arricchirsi spettralmente.

## 1.9 Vibrazione di barre

Questo tipo di sistema vibrante presenta comportamenti che sono a metà strada tra le corde e le membrane. Generalmente ci si riferisce a barre la cui geometria è quella schematizzata nella figura 36.1.

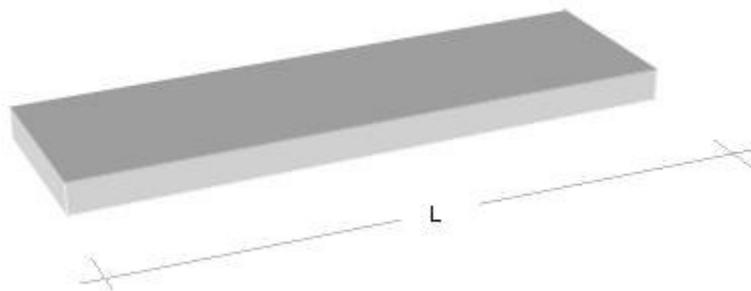


Fig. 36.1 Barra metallica di lunghezza L

Le barre hanno generalmente una geometria in cui prevale la lunghezza ma non possono essere trascurate le altre dimensioni. In generale, oltre alle vibrazioni trasversali, occorre tener conto sia delle vibrazioni longitudinali che delle deformazioni torsionali e ciò rende le cose più complicate rispetto alle corde. In ogni caso possono essere presi in considerazione diversi casi che condizionano la soluzione dell'equazione differenziale che ne descrive il comportamento: barre libere, barre appoggiate e barre bloccate (fig. 37.1).

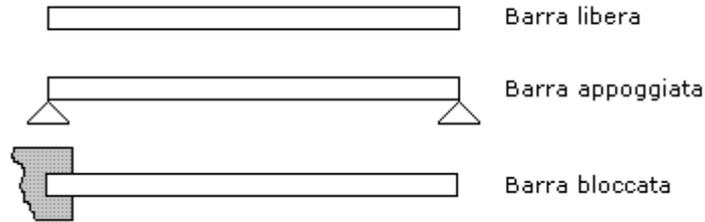


Fig. 37.1 Tre differenti terminazione delle barre

I tre casi rappresentati in figura 37.1 determinano condizioni diverse per le equazioni che ne descrivono la vibrazione così che si perviene a differenti risultati.

a) Nel caso delle barre non vincolate sono nulle le forze torsionali e di taglio e le frequenze modali sono descritte dall'equazione:

$$(Rossing- Fletcher) \quad f_n = \frac{(\pi K)}{(8L^2)} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} [3.011^2, 5^2, 7^2, \dots, (2n+1)^2]$$

dove  $K =$  raggio di girazione<sup>4</sup> (m)

$L =$  lunghezza della barra (m)

$Y =$  modulo di Young ( $N/m^2$ )

$\rho =$  densità

Alternativamente è possibile esprimere la frequenza del primo modo ( $f_1$ ) e le parziali successive ( $f_n$ ) con le formule seguenti:

$$f_1 = 1.028 \frac{a}{L^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

dove  $a =$  spessore della barra

$$f_n \approx 0.441 \left[ n + \frac{1}{2} \right]^2 f_1$$

Ciò porta ad una sequenza del tipo:

$$\begin{aligned} f_1 & \\ f_2 &= 2.76 f_1 \\ f_3 &= 5.40 f_1 \\ f_4 &= 8.93 f_1 \end{aligned}$$

<sup>4</sup> Il **raggio di girazione** di un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse è la distanza  $K$  dall'asse di rotazione alla quale dovrebbe pensarsi concentrata la massa  $M$  del corpo in modo che il *momento d'inerzia*  $I$  di tale massa rispetto all'asse  $a$  sia uguale a quello del corpo rispetto allo stesso asse di rotazione. Il momento d'inerzia è invece definito come  $I = M k^2$

Per una barra della stessa lunghezza di sezione circolare, i rapporti di frequenza tra i modi sono gli stessi di una barra rettangolare ma la frequenza del primo modo è data da:

$$f_1 = 1.78 \frac{a}{L^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

da cui si può dedurre che la frequenza fondamentale è più elevata di circa una sesta maggiore rispetto ad una barra rettangolare di pari lunghezza.

**b)** Per una barra rettangolare appoggiata di stesse caratteristiche le frequenze di vibrazione sono date da:

$$f_n = \frac{(\pi K)}{(2L^2)} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} m^2$$

con  $m = 1, 2, 3, 4$

Le frequenze in gioco sono notevolmente più basse di quelle relative alla barra libera poiché le lunghezze d'onda sono più sensibilmente più lunghe (figura 38.1). Le frequenze sono quindi:

$$\begin{aligned} f_1 & \\ f_2 &= \mathbf{4.0} f_1 \\ f_3 &= \mathbf{9.0} f_1 \\ f_4 &= \mathbf{16.0} f_1 \end{aligned}$$

**c)** Per una barra bloccata ad un'estremità, di stesse caratteristiche le frequenze di vibrazione sono date da:

$$f_n = \frac{(\pi K)}{(8L^2)} \sqrt{\frac{Y}{\rho}} [1.194^2, 2.988^2, 5^2, \dots, (2n-1)^2]$$

dove  $K =$  raggio di girazione ( $m$ )

$L =$  lunghezza della barra ( $m$ )

$Y =$  modulo di Young ( $N/m^2$ )

$\rho =$  densità

Alternativamente è possibile esprimere la frequenza del primo modo ( $f_1$ ) e le parziali successive ( $f_n$ ) con le formule seguenti:

$$f_1 = 0.162 \frac{a}{L^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

dove  $a =$  spessore della barra

$$f_n \approx 2.81 \left[ n - \frac{1}{2} \right]^2 f_1$$

Le frequenze sono quindi:

$$\begin{aligned}
 f_1 & \\
 f_2 &= 6.26 f_1 \\
 f_3 &= 17.53 f_1 \\
 f_4 &= 34.33 f_1
 \end{aligned}$$

Per una barra nelle stesse condizioni ma con sezione circolare, la frequenza del primo modo è data da:

$$f_1 = 0.28 \frac{a}{L^2} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Nella figura 38.1 vengono riassunti i modi di vibrazione descritti in questo paragrafo. I valori numerici sono dati in modo tale che sia possibile confrontare non solo i rapporti tra le parziali tra loro (in parentesi tonda i rapporti normalizzati) ma anche i rapporti tra le fondamentali (nelle parentesi quadre).

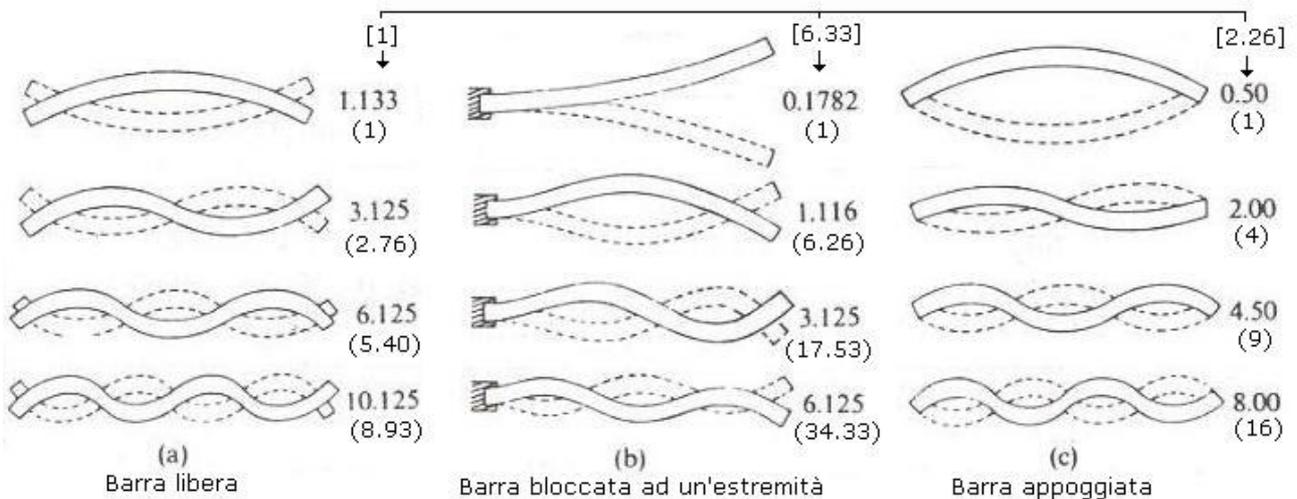


Fig. 38.1 Modi di vibrazione nei tre tipi di barre: (a) barra completamente libera, (b) barra bloccata ad un'estremità, (c) barra appoggiata su entrambe le estremità (da Rossing-Fletcher)

*NOTA: Il valore di K (raggio di girazione) assume valori diversi in relazione alla forma e alle proporzioni della barra. In figura 39.1 sono mostrati tre diversi valori per altrettante forme.*

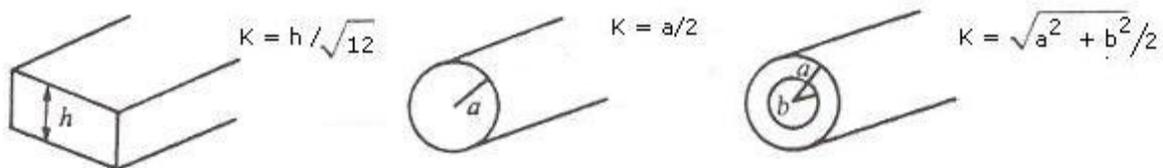


Fig. 39.1 Valori del raggio di girazione (K) per alcuni casi specifici (adattamento da Rossing-Fletcher)

1.10 ..

**1.11**