Seconda esercitazione progettuale
Progetto di un telaio piano in c.a.

Analisi delle sollecitazioni secondo il Metodo di Cross con vincoli ausiliari

1. Riepilogo delle caratteristiche geometrico-meccaniche del telaio in oggetto;

2. Valutazione dei coefficienti di ripartizione;

3. Valutazione dei coefficienti di trasporto sulle aste;

4. Soluzione dello schema a nodi fissi;

5-7. Soluzione dei tre schemi a nodi traslati;

8. Sovrapposizione degli effetti.

NOTA: l'esecuzione del Metodo di Cross è stato condotto nei vari casi utilizzando la stessa sequenza di nodi per le operazioni di ripartizione del momento squilibrato (10-11-12-9-8-7-4-5-6). Questo fatto è legato all'utilizzo di un foglio di calcolo (lo stesso) per risolvere tutti gli schemi di Cross. In una risoluzione manuale si può scegliere per i diversi schemi una sequenza diversa per le operazione di ripartizione dei momenti tra i vari nodi.

1. Riepilogo delle caratteristiche geometrico-meccaniche

Asta	L_{ij}	b	h	Inerzia	W_{ij}	V_{ij}	U_{ij}
	[cm]	[cm]	[cm]	[cm^4]	[kNm]	[kNm]	[kN]
1,4	350	40	50	416667	119047.7	59523.9	51020.4
4,7	350	40	50	416667	119047.7	59523.9	51020.4
7,10	350	40	50	416667	119047.7	59523.9	51020.4
2,5	350	80	50	833333	238095.1	119047.6	102040.8
5,8	350	80	50	833333	238095.1	119047.6	102040.8
8,11	350	80	50	833333	238095.1	119047.6	102040.8
3,6	350	40	50	416667	119047.7	59523.9	51020.4
6,9	350	40	50	416667	119047.7	59523.9	51020.4
9,12	350	40	50	416667	119047.7	59523.9	51020.4
4,5	450	30	60	540000	120000.0	60000.0	40000.0
5,6	500	30	60	540000	108000.0	54000.0	32400.0
7,8	450	30	60	540000	120000.0	60000.0	40000.0
8,9	500	30	60	540000	108000.0	54000.0	32400.0
10,11	450	30	60	540000	120000.0	60000.0	40000.0
11,12	500	30	60	540000	108000.0	54000.0	32400.0

2. Valutazione dei coefficienti di ripartizione per i diversi nodi

Nodo	Asta	W_{ij} [kNm]	$\Sigma_j W_{ij}$ [kNm]	τ_{ij}
4	4-1	1E+05	4E+05	0.332
	4-5	1E+05		0.335
	4-7	1E+05		0.332
5	5-2	2E+05	7E+05	0.338
	5-4	1E+05		0.170
	5-6	1E+05		0.153
	5-8	2E+05		0.338
6	6-3	1E+05	3E+05	0.344
	6-5	1E+05		0.312
	6-9	1E+05		0.344
7	7-4	1E+05	4E+05	0.332
	7-8	1E+05		0.335
	7-10	1E+05		0.332
8	8-5	2E+05	7E+05	0.338
	8-7	1E+05		0.170
	8-9	1E+05		0.153
	8-11	2E+05		0.338
9	9-6	1E+05	3E+05	0.344
	9-8	1E+05		0.312
	9-12	1E+05		0.344
10	10-7	1E+05	2E+05	0.498
	10-11	1E+05		0.502
11	11-8	2E+05	5E+05	0.511
	11-10	1E+05		0.257
	11-12	1E+05		0.232
12	12-9	1E+05	2E+05	0.524
	12-11	1E+05		0.476

3. Valutazione dei coefficienti di trasporto tra gli estremi delle aste

Asta	W_{ij}	V_{ji}	+..	W_{ji}	V_{ij}	+..

	[kNm]	[kNm]	η_{ij}	[kNm]	[kNm]	η_{ij}
1,4	119048	59524	0.500	119048	59523.81	0.500
4,7	119048	59524	0.500	119048	59523.81	0.500
7,10	119048	59524	0.500	119048	59523.81	0.500
2,5	238095	119048	0.500	238095	119047.62	0.500
5,8	238095	119048	0.500	238095	119047.62	0.500
8,11	238095	119048	0.500	238095	119047.62	0.500
3,6	119048	59524	0.500	119048	59523.81	0.500
6,9	119048	59524	0.500	119048	59523.81	0.500
9,12	119048	59524	0.500	119048	59523.81	0.500
4,5	120000	60000	0.500	120000	60000	0.500
5,6	108000	54000	0.500	108000	54000	0.500
7,8	120000	60000	0.500	120000	60000	0.500
8,9	108000	54000	0.500	108000	54000	0.500
10,11	120000	60000	0.500	120000	60000	0.500
11,12	108000	54000	0.500	108000	54000	0.500

4. Soluzione dello schema a nodi fissi

Si considera come esempio la combinazione di carico n.2 nella quale le azioni verticali sono forniti dalla combinazione $g_k+\psi_2 q_k$ che fornisce i valori seguenti:

p_1= 36.78 kN/m p_2= 36.78 kN/m p_3= 28.96 kN/m

da cui scaturiscono i seguenti valori dei momenti di incastro perfetto agli estremi delle aste

$\mu_{4,5}$= -62.07 kNm $\mu_{5,4}$= 62.07 kNm
$\mu_{5,6}$= -76.63 kNm $\mu_{6,5}$= 76.63 kNm

$\mu_{7,8}$= -62.07 kNm $\mu_{8,7}$= 62.07 kNm
$\mu_{8,9}$= -76.63 kNm $\mu_{9,8}$= 76.63 kNm

$\mu_{10,11}$= -48.87 kNm $\mu_{11,10}$= 48.87 kNm
$\mu_{11,12}$= -60.33 kNm $\mu_{12,11}$= 60.33 kNm

Nella valutazione degli sforzi normali si devono anche considerare le seguenti forze orizzontali:

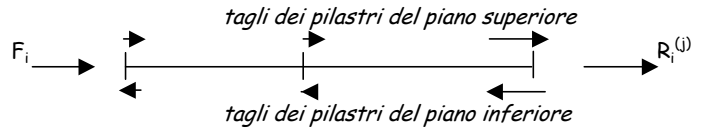
F_1= 49.18 kN
F_2= 98.35 kN
F_3= 102.48 kN

Risolvendo o schema con il metodo di Hardy-Cross si ottengono i seguenti valori dei momenti sulle aste, dai quali si possono facilmente derivare gli sforzi di taglio agli estremi delle stesse (cfr. schema **S0**):

Asta	L_{ij}	$M_{ij}^{(0)}$	$M_{ji}^{(0)}$	q_{ji}	$T_{ij}^{(0)}$	$T_{ji}^{(0)}$
	[cm]	[kNm]	[kNm]	[kN/m]	[kN]	[kN]
1,4	350	8.94	17.89	0.00	-7.67	-7.67
4,7	350	24.91	22.98	0.00	-13.68	-13.68
7,10	350	24.07	27.08	0.00	-14.61	-14.61
2,5	350	2.46	4.93	0.00	-2.11	-2.11
5,8	350	6.61	5.84	0.00	-3.56	-3.56
8,11	350	6.49	7.92	0.00	-4.12	-4.12
3,6	350	-11.84	-23.68	0.00	10.15	10.15

6,9	350	-32.57	-29.62	0.00	17.77	17.77
9,12	350	-31.64	-36.60	0.00	19.50	19.50
4,5	450	-42.79	73.57	36.78	75.92	-89.59
5,6	500	-85.13	56.26	36.78	97.72	-86.18
7,8	450	-47.07	70.84	36.78	77.47	-88.04
8,9	500	-83.16	61.26	36.78	96.33	-87.57
10,11	450	-27.08	62.13	28.96	57.37	-72.95
11,12	500	-70.08	36.61	28.96	79.09	-65.71

Per calcolare le reazioni dei vincoli è possibile effettuare **equilibri di nodo** al fine di ottenere gli sforzi normali in tutte le aste. Nel caso di strutture a maglie rettangolari le reazioni possono anche essere determinate da un equilibrio del traverso alla traslazione orizzontale considerando le azioni rappresentate sul seguente diagramma di corpo libero:



Nello schema di sopra le forze sono state considerate con il verso corrispondnte al segno positivo. Per non complicare il formalismo (che peraltro sarebbe soltanto valido per il caso in oggetto) ci riferiamo alla ΣT_{sup} ed alla ΣT_{inf} per indicare la sommatoria dei tagli nei pilastri rispettivamente superiori ed inferiori rispetto all'impalcato i-esimo. Si ottiene, dunque,

$$R_i^{(j)} = -F_i^{(j)} - \sum T_{sup}^{(j)} + \sum T_{inf}^{(j)}$$

nella quale si è posto esplicitamente il riferimento allo schema j-esimo e, nella fattispecie, avendo preso in considerazione lo schema a nodi fissi (S_0) si deve porre j=0.

$F_i^{(0)}$ [kN]	$\Sigma T_{sup}^{(0)}$ [kN]	$\Sigma T_{inf}^{(0)}$ [kN]	$R_i^{(0)}$ [kN]
49.18	0.53	0.37	**-49.34**
98.35	0.77	0.53	**-98.59**
102.48	0.00	0.77	**-101.71**

5. Soluzione dello schema dello schema 1 (nodo 6 traslato)

Sulla struttura non sono presenti i carichi ma si deve considerare l'effetto di un cedimento vincolare δ del vincolo posto in corrispondenza del nodo 6:
Per effetto di tale spostamento si desteranno, sullo schema a nodi bloccati, momenti di incastro perfetto nei pilastri interessati dallo spostamento ne segue:

$$\mu_{i,j}^{(1)} = U_{i,j}\delta$$

Al fine di avere momenti di incastro perfetto di ordine di grandezza paragonabile a quelli derivanti dai carichi verticali sullo schema a nodi fissi, si pone:

δ= 0.0005 m

$\mu_{1,4}$=	-25.51	kNm	$\mu_{2,5}$=	-51.02	kNm	$\mu_{3,6}$=	-25.51	kNm
$\mu_{4,1}$=	-25.51	kNm	$\mu_{5,2}$=	-51.02	kNm	$\mu_{6,3}$=	-25.51	kNm
$\mu_{4,7}$=	25.51	kNm	$\mu_{5,8}$=	51.02	kNm	$\mu_{6,9}$=	25.51	kNm
$\mu_{7,4}$=	25.51	kNm	$\mu_{8,5}$=	51.02	kNm	$\mu_{9,6}$=	25.51	kNm

Risolvendo o schema con il metodo di Hardy-Cross si ottengono i seguenti valori dei momenti

sulle aste, dai quali si possono facilmente derivare gli sforzi di taglio agli estremi delle stesse (cfr. schema **S1**):

Asta	L_{ij}	$M_{ij}^{(1)}$	$M_{ji}^{(1)}$	q_{ji}	$T_{ij}^{(1)}$	$T_{ji}^{(1)}$
	[cm]	[kNm]	[kNm]	[kN/m]	[kN]	[kN]
1,4	350	-24.97	-24.44	0.00	14.12	14.12
4,7	350	22.78	18.45	0.00	-11.78	-11.78
7,10	350	-6.85	-2.31	0.00	2.62	2.62
2,5	350	-49.88	-48.74	0.00	28.18	28.18
5,8	350	45.47	36.51	0.00	-23.42	-23.42
8,11	350	-14.04	-4.61	0.00	5.33	5.33
3,6	350	-24.91	-24.30	0.00	14.06	14.06
6,9	350	22.69	18.05	0.00	-11.64	-11.64
9,12	350	-7.19	-2.30	0.00	2.71	2.71
4,5	450	1.65	1.69	0.00	-0.74	-0.74
5,6	500	1.58	1.61	0.00	-0.64	-0.64
7,8	450	-11.60	-11.71	0.00	5.18	5.18
8,9	500	-10.75	-10.86	0.00	4.32	4.32
10,11	450	2.31	2.37	0.00	-1.04	-1.04
11,12	500	2.24	2.30	0.00	-0.91	-0.91

Per calcolare le reazioni dei vincoli è possibile effettuare **equilibri di nodo** al fine di ottenere gli sforzi normali in tutte le aste. Anche in questo caso si ricorre alprocedimento sintetico esposto sopra:

$F_i^{(1)}$ [kN]	$\Sigma T_{sup}^{(1)}$ [kN]	$\Sigma T_{inf}^{(1)}$ [kN]	$R_i^{(1)}$ [kN]
0.00	-46.85	56.36	**103.20**
0.00	10.66	-46.85	**-57.51**
0.00	0.00	10.66	**10.66**

6. Soluzione dello schema dello schema 2 (nodo 9 traslato)

Sulla struttura non sono presenti i carichi ma si deve considerare l'effetto di un cedimento vincolare δ del vincolo posto in corrispondenza del nodo 9: Per effetto di tale spostamento si desteranno, sullo schema a nodi bloccati, momenti di incastro perfetto nei pilastri interessati dallo spostamento ne segue:

$$\mu_{i,j}^{(1)} = U_{i,j}\delta$$

Al fine di avere momenti di incastro perfetto di ordine di grandezza paragonabile a quelli derivanti dai carichi verticali sullo schema a nodi fissi, si pone:

δ= 0.0005 m

$\mu_{4,7}$=	-25.51	kNm	$\mu_{5,8}$=	-51.02	kNm	$\mu_{5,8}$=	-25.51	kNm
$\mu_{7,4}$=	-25.51	kNm	$\mu_{8,5}$=	-51.02	kNm	$\mu_{8,5}$=	-25.51	kNm
$\mu_{7,10}$=	25.51	kNm	$\mu_{8,11}$=	51.02	kNm	$\mu_{9,12}$=	25.51	kNm
$\mu_{10,7}$=	25.51	kNm	$\mu_{11,8}$=	51.02	kNm	$\mu_{12,9}$=	25.51	kNm

Risolvendo o schema con il metodo di Hardy-Cross si ottengono i seguenti valori dei momenti sulle aste, dai quali si possono facilmente derivare gli sforzi di taglio agli estremi delle stesse (cfr. schema **S2**):

Asta	L_{ij}	$M_{ij}^{(2)}$	$M_{ji}^{(2)}$	q_{ji}	$T_{ij}^{(2)}$	$T_{ji}^{(2)}$
	[cm]	[kNm]	[kNm]	[kN/m]	[kN]	[kN]
1,4	350	3.59	7.18	0.00	-3.08	-3.08
4,7	350	-18.12	-21.50	0.00	11.32	11.32
7,10	350	20.85	15.56	0.00	-10.40	-10.40
2,5	350	7.36	14.71	0.00	-6.31	-6.31
5,8	350	-35.84	-42.73	0.00	22.45	22.45
8,11	350	41.39	30.35	0.00	-20.50	-20.50
3,6	350	3.77	7.54	0.00	-3.23	-3.23
6,9	350	-17.71	-21.22	0.00	11.12	11.12
9,12	350	20.53	14.77	0.00	-10.09	-10.09
4,5	450	10.94	11.03	0.00	-4.88	-4.88
5,6	500	10.09	10.17	0.00	-4.05	-4.05
7,8	450	0.66	0.68	0.00	-0.30	-0.30
8,9	500	0.66	0.69	0.00	-0.27	-0.27
10,11	450	-15.56	-15.77	0.00	6.96	6.96
11,12	500	-14.58	-14.77	0.00	5.87	5.87

Per calcolare le reazioni dei vincoli è possibile effettuare **equilibri di nodo** al fine di ottenere gli sforzi normali in tutte le aste. Anche in questo caso si ricorre alprocedimento sintetico esposto sopra:

$F_i^{(2)}$ [kN]	$\Sigma T_{sup}^{(2)}$ [kN]	$\Sigma T_{inf}^{(2)}$ [kN]	$R_i^{(2)}$ [kN]
0.00	44.89	-12.61	**-57.51**
0.00	-40.99	44.89	**85.88**
0.00	0.00	-40.99	**-40.99**

7. Soluzione dello schema dello schema 3 (nodo 12 traslato)

Sulla struttura non sono presenti i carichi ma si deve considerare l'effetto di un cedimento vincolare δ del vincolo posto in corrispondenza del nodo 9: Per effetto di tale spostamento si desteranno, sullo schema a nodi bloccati, momenti di incastro perfetto nei pilastri interessati dallo spostamento ne segue:

$$\mu_{i,j}^{(1)} = U_{i,j}\delta$$

Al fine di avere momenti di incastro perfetto di ordine di grandezza paragonabile a quelli derivanti dai carichi verticali sullo schema a nodi fissi, si pone:

δ= 0.0005 m

$\mu_{7,10}$= -25.51 kNm $\mu_{8,11}$= -51.02 kNm $\mu_{9,12}$= -25.51 kNm

$\mu_{10,7}$= -25.51 kNm $\mu_{11,8}$= -51.02 kNm $\mu_{12,9}$= -25.51 kNm

Risolvendo o schema con il metodo di Hardy-Cross si ottengono i seguenti valori dei momenti

sulle aste, dai quali si possono facilmente derivare gli sforzi di taglio agli estremi delle stesse (cfr. schema **S3**):

Asta	L_{ij}	$M_{ij}^{(3)}$	$M_{ji}^{(3)}$	q_{ji}	$T_{ij}^{(3)}$	$T_{ji}^{(3)}$
	[cm]	[kNm]	[kNm]	[kN/m]	[kN]	[kN]
1,4	350	-0.43	-0.86	0.00	0.37	0.37
4,7	350	2.19	5.68	0.00	-2.25	-2.25
7,10	350	-14.97	-13.58	0.00	8.16	8.16
2,5	350	-0.91	-1.81	0.00	0.78	0.78
5,8	350	4.41	11.53	0.00	-4.55	-4.55
8,11	350	-29.39	-26.41	0.00	15.94	15.94
3,6	350	-0.47	-0.95	0.00	0.41	0.41
6,9	350	2.22	5.86	0.00	-2.31	-2.31
9,12	350	-14.42	-12.82	0.00	7.78	7.78
4,5	450	-1.33	-1.35	0.00	0.59	0.59
5,6	500	-1.25	-1.27	0.00	0.50	0.50
7,8	450	9.29	9.35	0.00	-4.14	-4.14
8,9	500	8.51	8.56	0.00	-3.41	-3.41
10,11	450	13.58	13.74	0.00	-6.07	-6.07
11,12	500	12.67	12.82	0.00	-5.10	-5.10

Per calcolare le reazioni dei vincoli è possibile effettuare **equilibri di nodo** al fine di ottenere gli sforzi normali in tutte le aste. Anche in questo caso si ricorre alprocedimento sintetico esposto sopra:

$F_i^{(3)}$ [kN]	$\Sigma T_{sup}^{(3)}$ [kN]	$\Sigma T_{inf}^{(3)}$ [kN]	$R_i^{(3)}$ [kN]
0.00	-9.11	1.55	**10.66**
0.00	31.88	-9.11	**-40.99**
0.00	0.00	31.88	**31.88**

8. Determinazione dei valori dei coefficieni di combinazione α_i

I valori di α_i derivano dalla condizione che la reazione vincolare complessiva, ottenuta per sovrapposizione di quelle che si hanno nei vari schemi considerati sia nulla dal momento che il vincolo in oggetto non esiste sulla struttura S.
Per i richiami teorici del Metodo dei vincoli ausiliari si rimanda al libro di testo (Faella, vol. 2) o alle dispense.

$$\begin{bmatrix} 103.20 & -57.51 & 10.66 \\ -57.51 & 85.88 & -40.99 \\ 10.66 & -40.99 & 31.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49.34 \\ 98.59 \\ 101.71 \end{bmatrix}$$

Soluzione del sistema:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0239 & 0.0316 & 0.0326 \\ 0.0316 & 0.0718 & 0.0818 \\ 0.0326 & 0.0818 & 0.1256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 49.34 \\ 98.59 \\ 101.71 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 7.61 \\ 16.95 \\ 22.44 \end{matrix}$$

I coefficienti così determinati posson essere utilizzati per determinare le carattteristiche della sollecitazione dello schema S per combinazione di quelle dei diversi schemi. Il generico momento M_{ij} può essere valutato secondo la seguente relazione:

$$M_{ij} = M_{ij}^{(0)} + \sum_k M_{ij}^{(k)}$$

Nella tabella seguente vengono valutati tagli e momenti per le varie aste:

Asta	$M_{ij}^{(0)}$	$M_{ij}^{(1)}$	$M_{ij}^{(2)}$	$M_{ij}^{(3)}$	M_{ij}	$M_{ji}^{(0)}$	$M_{ji}^{(1)}$	$M_{ji}^{(2)}$	$M_{ji}^{(3)}$	M_{ji}
	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]	[kNm]
1,4	8.94	-24.97	3.59	-0.43	-129.84	17.89	-24.44	7.18	-0.86	-65.67
4,7	24.91	22.78	-18.12	2.19	-59.86	22.98	18.45	-21.50	5.68	-73.83
7,10	24.07	-6.85	20.85	-14.97	-10.46	27.08	-2.31	15.56	-13.58	-31.45
2,5	2.46	-49.88	7.36	-0.91	-272.52	4.93	-48.74	14.71	-1.81	-157.01
5,8	6.61	45.47	-35.84	4.41	-156.13	5.84	36.51	-42.73	11.53	-182.00
8,11	6.49	-14.04	41.39	-29.39	-58.28	7.92	-4.61	30.35	-26.41	-105.36
3,6	-11.84	-24.91	3.77	-0.47	-148.01	-23.68	-24.30	7.54	-0.95	-102.00
6,9	-32.57	22.69	-17.71	2.22	-110.49	-29.62	18.05	-21.22	5.86	-120.60
9,12	-31.64	-7.19	20.53	-14.42	-61.83	-36.60	-2.30	14.77	-12.82	-91.30
4,5	-42.79	1.65	10.94	-1.33	125.53	73.57	1.69	11.03	-1.35	243.19
5,6	-85.13	1.58	10.09	-1.25	69.91	56.26	1.61	10.17	-1.27	212.50
7,8	-47.07	-11.60	0.66	9.29	84.30	70.84	-11.71	0.68	9.35	203.02
8,9	-83.16	-10.75	0.66	8.51	37.26	61.26	-10.86	0.69	8.56	182.41
10,11	-27.08	2.31	-15.56	13.58	31.45	62.13	2.37	-15.77	13.74	121.21
11,12	-70.08	2.24	-14.58	12.67	-15.89	36.61	2.30	-14.77	12.82	91.30

I valori riportati nella tabella sono in ottimo accordo con quelli ottenuti applicanti in metodo degli spostamento

Il valore del taglio agli estremi delle aste può essere calcolato imponendo l'equilibrio alla rotazione ed alla traslazione (trasversale) sull'asta.
Il valore degli sforzi normali può essere determinato per equilibrio dei nodi alla traslazione nelle due direzioni.