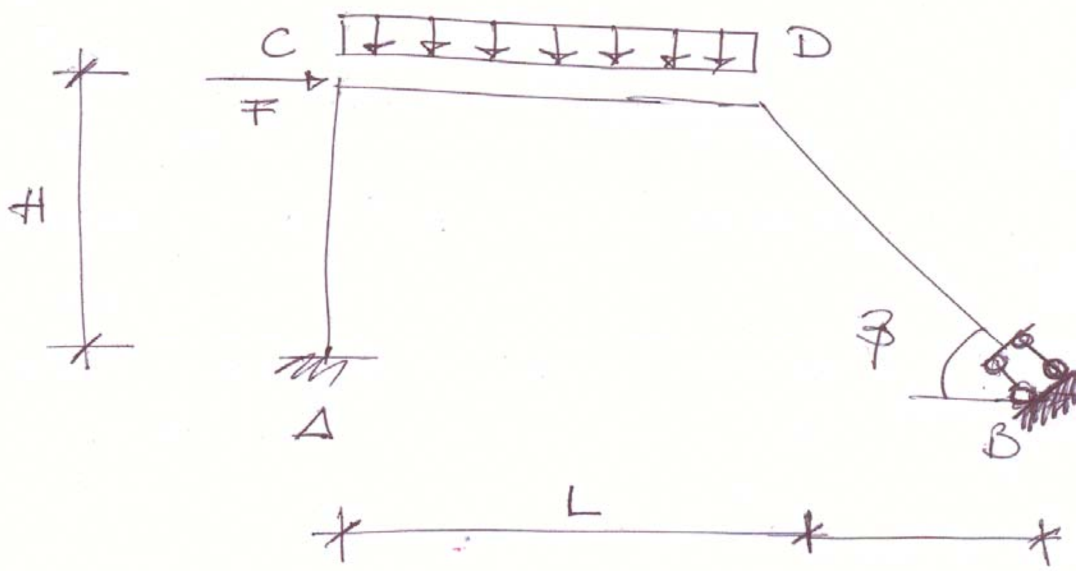
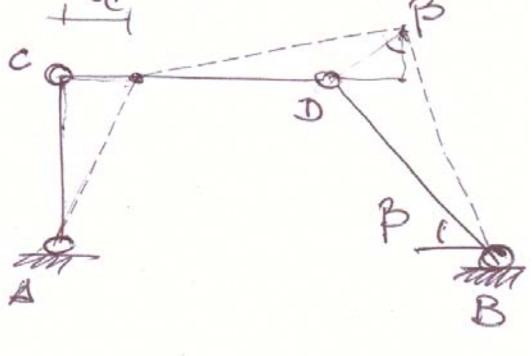
Due esercizi sul tema del portale ad un piano (a maglie generiche)

1 1°CASO: ASTA INCLINATA CON DOPPIO-PENDOLO AD ASSE PARALLELO ALL'ASTA



Considerazioni

La presenza del doppio-pendolo come vincolo esterno può essere compresa nella definizione dei coefficienti di rigidezza dell'asta BD. Pertanto il numero di nodi spostabili da considerare può desumersi dalla struttura pendolare rappresentata a lato



$3t - 2n = 3\cdot 3 - 2\cdot 4 = 1$

Di conseguenza le incognite del problema sono 3

$$\underline{S} = \left\{ \varphi_C, \varphi_D, \delta_C \right\}$$

essendo δ_C lo spostamento (orizzontale) del punto C.

Svolgimento

Le tre equazioni da invocare per determinare le suddette incognite menzionate sono le seguenti:

1) Equilibrio alla rotazione nel punto C

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \qquad (1)$$

2) Equilibrio alla rotazione nel punto D

$$M_{DC} + M_{DB} = 0 \qquad (2)$$

3) Equilibrio globale ottenuto tramite la scrittura del PLV sullo schema reticolare associato

$$\left(M_{AC}+M_{CA}\right)\cdot\frac{\delta'_{AC}}{l_{AC}} + \left(M_{BD}+M_{DB}\right)\frac{\delta'_{BD}}{l_{BD}} + \left(M_{CD}+M_{DC}\right)\cdot\frac{\delta'_{CD}}{l_{CD}} + F\cdot\delta'_C - \frac{qL}{2}\cdot\frac{1}{tg\beta}\delta'_C = 0$$

	δ'_C
δ'_{AC}	1
δ'_{BD}	$1/\sin\beta$
δ'_{CD}	$-1/tg\beta$

da cui

$$\left[\frac{M_{AC}+M_{CA}}{H}+\frac{M_{BD}+M_{DB}}{H}-\frac{M_{CD}+M_{DC}}{L}+F-\frac{qL}{2tg\beta}\right]\cdot\delta_c'=0$$

che, essendo δ_c' arbitrario, risulta verificata solo se

$$\frac{M_{AC}+M_{CA}}{H}+\frac{M_{BD}+M_{DB}}{H}-\frac{M_{CD}+M_{DC}}{L}+F-\frac{qL}{2tg\beta}=0 \quad (3)$$

Le eqq. (1)-(2)-(3) costituiscono il sistema risolutivo del problema in oggetto.

I valori numerici sono riportati nel seguito.

COEFFICIENTI DI RIGIDEZZA.

Per l'asta BD si ha

$$W_{ij}=\frac{EJ_{ij}}{e_{ij}}\;;\quad V_{ij}=\frac{EJ_{ij}}{e_{ij}}\;;\quad U_{ij}=0$$

Schema Strutturale

Dati Numerici

```
AngoloBeta = Pi/4;
L = 5000;
H = 3000;
bt = 300;
ht = 600;
br = 300;
hr = 500;
q = 40;
F = 20000;
fck = 20;
```

```
It = bt ht^3/12;
Ir = br hr^3/12;
Ec = N[9500 (fck + 8)^(1/3)];
```

Incognite

```
Incognite = {FiC, FiD, DeltaC, DeltaB};
```

Espressione degli spostamenti d'asta in funzione di quelli dei nodi

Con riferimento alle relazioni che legano gli spostamenti nodali (siano essi virtuali o effettivi) a quelli trasversali subiti dalle aste si costruisce la seguenete matrice di corrisopndenza:

```
Tabella =
  {{1, -1/Tan[AngoloBeta], 1/Sin[AngoloBeta]}};
Tabella = Transpose[Tabella];
MatrixForm[Tabella]
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

```
DeltaNodi = {DeltaC};
DeltaVirtualeNodi = {DeltaVirtualeC};
```

Definizione degli spostamenti trasversali delle aste

```
DeltaAste = {DeltaAC, DeltaCD, DeltaBD}
DeltaVirtualeAste =
  {DeltaVirtualeAC, DeltaVirtualeCD,
    DeltaVirtualeBD}
```

```
{DeltaAC, DeltaCD, DeltaBD}
```

```
{DeltaVirtualeAC,
 DeltaVirtualeCD, DeltaVirtualeBD}
```

Legame tra spostamenti d'asta e spostamenti nodali

```
DeltaAste = Tabella.DeltaNodi
DeltaVirtualeAste = Tabella.DeltaVirtualeNodi
```

$\{\text{DeltaC}, -\text{DeltaC}, \sqrt{2}\ \text{DeltaC}\}$

$\{\text{DeltaVirtualeC}, -\text{DeltaVirtualeC}, \sqrt{2}\ \text{DeltaVirtualeC}\}$

Espressione dei coefficienti di rigidezza e dei momenti di incastro perfetto.

ASTA AC

```
WAC = 4 Ec Ir / H;
WCA = 4 Ec Ir / H;
VAC = 2 Ec Ir / H;
VCA = 2 Ec Ir / H;
UAC = 6 Ec Ir / H ^2;
UCA = 6 Ec Ir / H ^2;
muCA = 0;
muAC = 0;
```

ASTA BD

```
WBD = Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
WDB = Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
VBD = -Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
VDB = -Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
UBD = 0;
UDB = 0;
muBD = 0;
muDB = 0;
```

ASTA CD

```
WCD = 4 Ec It / L;
WDC = 4 Ec It / L;
VCD = 2 Ec It / L;
VDC = 2 Ec It / L;
UCD = 6 Ec It / L ^2;
UDC = 6 Ec It / L ^2;
muCD = -q L ^2 / 12;
muDC = q L ^2 / 12;
```

Espressione dei momenti d'estremità delle varie aste

ASTA AC

$MAC = VAC\ FiC - UAC\ DeltaAste[[1]] + muAC$
$MCA = WCA\ FiC - UCA\ DeltaAste[[1]] + muCA$

$-6.00992 \times 10^{7}\ DeltaC + 6.00992 \times 10^{10}\ FiC$

$-6.00992 \times 10^{7}\ DeltaC + 1.20198 \times 10^{11}\ FiC$

ASTA BD

$MBD = VBD\ FiD - UBD\ DeltaAste[[3]] + muBD$
$MDB = WDB\ FiD - UDB\ DeltaAste[[3]] + muDB$

$-2.12483 \times 10^{10}\ FiD$

$2.12483 \times 10^{10}\ FiD$

ASTA CD

$MCD = WCD\ FiC + VCD\ FiD - UCD\ DeltaAste[[2]] + muCD$
$MDC = WDC\ FiD + VDC\ FiC - UDC\ DeltaAste[[2]] + muDC$

$$-\frac{250000000}{3} + 3.73865 \times 10^{7}\ DeltaC + 1.24622 \times 10^{11}\ FiC + 6.23108 \times 10^{10}\ FiD$$

$$\frac{250000000}{3} + 3.73865 \times 10^{7}\ DeltaC + 6.23108 \times 10^{10}\ FiC + 1.24622 \times 10^{11}\ FiD$$

Scrittura delle equazioni di equilibrio

Equazioni di equilibrio alla rotazione

$Eq1 = MCA + MCD$
$Eq2 = MDB + MDC$

$$-\frac{250000000}{3} - 2.27127 \times 10^{7}\ DeltaC + 2.4482 \times 10^{11}\ FiC + 6.23108 \times 10^{10}\ FiD$$

$$\frac{250000000}{3} + 3.73865 \times 10^{7}\ DeltaC + 6.23108 \times 10^{10}\ FiC + 1.4587 \times 10^{11}\ FiD$$

Equazione di equilibrio globale

```
PLV = (MAC + MCA) DeltaVirtualeAste[[1]] / H +
   (MBD + MDB) DeltaVirtualeAste[[3]] /
      (H / Sin[AngoloBeta]) +
   (MCD + MDC) DeltaVirtualeAste[[2]] / L +
   F DeltaVirtualeC +
   q L (-DeltaVirtualeC / Tan[AngoloBeta] / 2);
```

```
Eq3 = -Coefficient[PLV, DeltaVirtualeC]
```

$$80000 + \frac{1.20198 \times 10^{8}\ \text{DeltaC} - 1.80297 \times 10^{11}\ \text{FiC}}{3000} + 0.\ \text{FiD} + \frac{1}{5000}(7.4773 \times 10^{7}\ \text{DeltaC} + 1.86932 \times 10^{11}\ \text{FiC} + 1.86932 \times 10^{11}\ \text{FiD})$$

Costruzione della matrice di rigidezza e del vettore dei termini noti

```
Sistema = {Eq1, Eq2, Eq3};
```

```
MatriceK =
  Table[Table[Coefficient[Sistema[[i]], Incognite[[j]]],
    {j, 1, 3}], {i, 1, 3}];
```

```
MatrixForm[MatriceK]
```

$$\begin{pmatrix} 2.4482 \times 10^{11} & 6.23108 \times 10^{10} & -2.27127 \times 10^{7} \\ 6.23108 \times 10^{10} & 1.4587 \times 10^{11} & 3.73865 \times 10^{7} \\ -2.27127 \times 10^{7} & 3.73865 \times 10^{7} & 55020.7 \end{pmatrix}$$

```
Q = -Sistema /. {FiC → 0, FiD → 0, DeltaC → 0}
```

$$\left\{\frac{250000000}{3}, -\frac{250000000}{3}, -80000\right\}$$

Soluzione delle equazioni di equilibrio

```
Sol = Solve[Sistema == 0, Incognite] // Flatten
```

```
Solve::svars :
 Equations may not give solutions
   for all "solve" variables.
```

```
{FiC → 0.000372468,
 FiD → -0.000480888, DeltaC → -0.97348}
```

Calcolo dei momenti nodali

ASTA AC

```
MACSol = MAC /. Sol
MCASol = MCA /. Sol
```

8.08903×10^{7}

1.03275×10^{8}

ASTA BD

MBDSol = MBD /. Sol
MDBSol = MDB /. Sol

1.0218×10^{7}

-1.0218×10^{7}

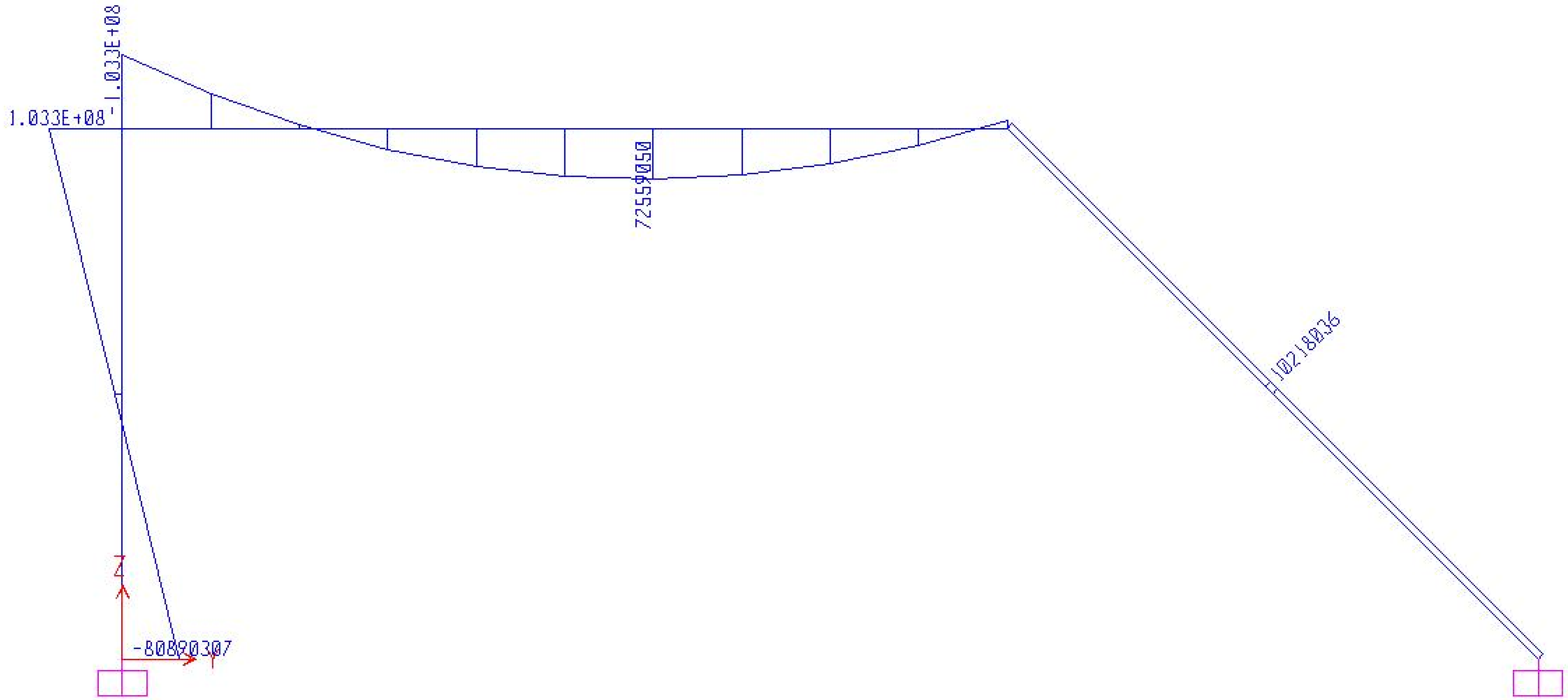
ASTA CD

MCDSol = MCD /. Sol
MDCSol = MDC /. Sol

-1.03275×10^{8}

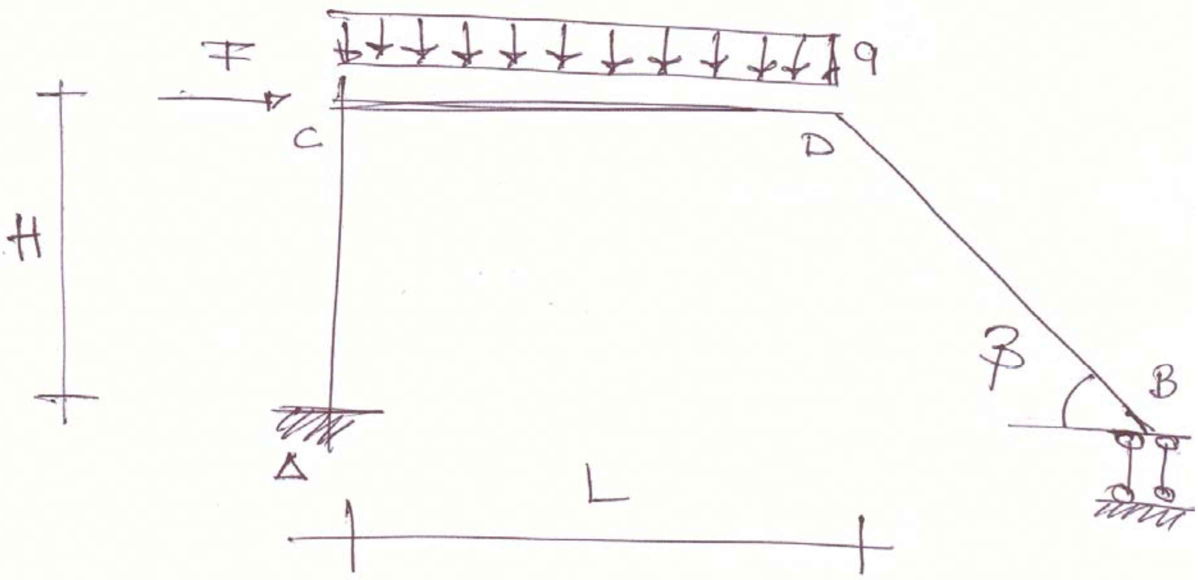
1.0218×10^{7}

Converted by *Mathematica* July 14, 2006



1.033E+08
1.033E+08
72559050
10218036
-80890307
Z
Y

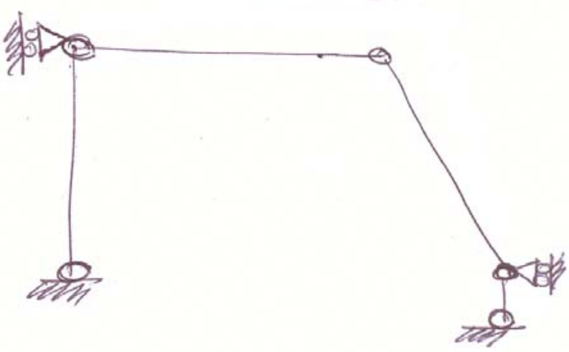
2 2°CASO: ASTA INCLINATA CON DOPPIO-PENDOLO AD ASSE VERTICALE



Considerazioni

Contrariamente al caso precedente gli spostamenti ammessi dal doppio-pendolo non coincidono con quelli trasversali dell'asta BD. Pertanto, in questo caso, lo spostamento oriz. del punto B deve essere considerato come ulteriore incognita del problema che risulta, dunque, a 2 nodi spostabili essendo in figura la struttura reticolare associata (con i due vincoli ausiliari che

ideali vincoli ausiliari



corrispondono ai due spostamenti incogniti:

$$s = \{ \varphi_C, \varphi_D, \delta_C, \delta_B \}$$

Risoluzione

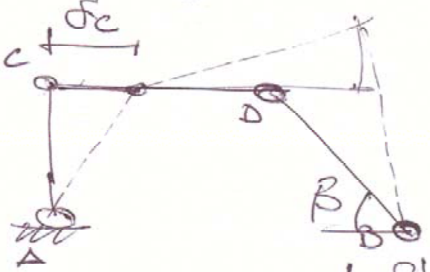
1. equazione di eq. alla rotazione in C

$$M_{CA} + M_{CD} = 0 \qquad (1)$$

2. equazione di eq. alla rotazione in D

$$M_{DB} + M_{DC} = 0 \qquad (2)$$

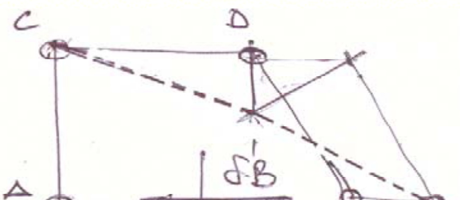
3. equazione di equilibrio globale (come nel caso precedente)



$$\frac{M_{AC}+M_{CA}}{H} + \frac{M_{DB}+M_{BD}}{H} - \frac{M_{CD}+M_{DC}}{L} + F - \frac{qL}{2\,tg\beta} = 0 \qquad (3)$$

	δ'_C
δ'_{AC}	1
δ'_{BD}	$+1/\sin\beta$
δ'_{CD}	$-1/tg\beta$

4. equazione di equilibrio globale



$$(M_{CD}+M_{DC})\frac{\delta'_{CD}}{l_{CD}} + (M_{DB}+M_{BD})\frac{\delta'_{DB}}{l_{DB}} + \frac{qL}{2\,tg\beta}\cdot\delta'_C = 0$$

$$\left[\frac{M_{CD}+M_{DC}}{L} - \frac{M_{DB}+M_{BD}}{H} + \frac{qL}{2\,tg\beta}\right]\cdot\delta'_C = 0$$

	δ'_B
δ'_{AC}	0
δ'_{BD}	$-1/\sin\beta$
δ'_{CD}	$1/tg\beta$

$$\frac{M_{CD}+M_{DC}}{L}-\frac{M_{DB}+M_{BD}}{H}+\frac{qL}{2\,tg\beta}=0 \qquad (4)$$

Per tutte le aste si ha

$$W_{ij}=\frac{4EJ_{ij}}{l_{ij}}$$

$$V_{ij}=\frac{2EJ_{ij}}{l_{ij}}$$

$$U_{ij}=\frac{6EJ_{ij}}{l_{ij}^2}$$

Segue la soluzione numerica.

Schema Strutturale

Dati Numerici

```
AngoloBeta = Pi/4;
L = 5000;
H = 3000;
bt = 300;
ht = 600;
br = 300;
hr = 500;
q = 40;
F = 20000;
fck = 20;
```

```
It = bt ht^3/12;
Ir = br hr^3/12;
Ec = N[9500 (fck + 8)^(1/3)];
```

Incognite

```
Incognite = {FiC, FiD, DeltaC, DeltaB};
```

Espressione degli spostamenti d'asta in funzione di quelli dei nodi

Con riferimento alle relazioni che legano gli spostamenti nodali (siano essi virtuali o effettivi) a quelli trasversali subiti dalle aste si costruisce la seguenete matrice di corrisopndenza:

```
Tabella =
  {{1, -1/Tan[AngoloBeta], 1/Sin[AngoloBeta]},
    {0, 1/Tan[AngoloBeta], -1/Sin[AngoloBeta]}};
Tabella = Transpose[Tabella];
MatrixForm[Tabella]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

```
DeltaNodi = {DeltaC, DeltaB};
DeltaVirtualeNodi =
  {DeltaVirtualeC, DeltaVirtualeB};
```

Definizione degli spostamenti trasversali delle aste

```
DeltaAste = {DeltaAC, DeltaCD, DeltaBD}
DeltaVirtualeAste =
  {DeltaVirtualeAC, DeltaVirtualeCD,
    DeltaVirtualeBD}
```

```
{DeltaAC, DeltaCD, DeltaBD}

{DeltaVirtualeAC,
 DeltaVirtualeCD, DeltaVirtualeBD}
```

Legame tra spostamenti d'asta e spostamenti nodali

```
DeltaAste = Tabella.DeltaNodi
DeltaVirtualeAste = Tabella.DeltaVirtualeNodi
```

$$\{\text{DeltaC}, \text{DeltaB} - \text{DeltaC}, -\sqrt{2}\ \text{DeltaB} + \sqrt{2}\ \text{DeltaC}\}$$

$$\{\text{DeltaVirtualeC}, \text{DeltaVirtualeB} - \text{DeltaVirtualeC}, -\sqrt{2}\ \text{DeltaVirtualeB} + \sqrt{2}\ \text{DeltaVirtualeC}\}$$

Espressione dei coefficienti di rigidezza e dei momenti di incastro perfetto.

ASTA AC

```
WAC = 4 Ec Ir / H;
WCA = 4 Ec Ir / H;
VAC = 2 Ec Ir / H;
VCA = 2 Ec Ir / H;
UAC = 6 Ec Ir / H ^2;
UCA = 6 Ec Ir / H ^2;
muCA = 0;
muAC = 0;
```

ASTA BD

```
WBD = 4 Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
WDB = 4 Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
VBD = 2 Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
VDB = 2 Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]);
UBD = 6 Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]) ^2;
UDB = 6 Ec Ir / (H / Sin[AngoloBeta]) ^2;
muBD = 0;
muDB = 0;
```

ASTA CD

```
WCD = 4 Ec It / L;
WDC = 4 Ec It / L;
VCD = 2 Ec It / L;
VDC = 2 Ec It / L;
UCD = 6 Ec It / L^2;
UDC = 6 Ec It / L^2;
muCD = -q L^2 / 12;
muDC = q L^2 / 12;
```

Espressione dei momenti d'estremità delle varie aste

ASTA AC

```
MAC = VAC FiC - UAC DeltaAste[[1]] + muAC
MCA = WCA FiC - UCA DeltaAste[[1]] + muCA
```

$-6.00992\times 10^{7}\ \text{DeltaC} + 6.00992\times 10^{10}\ \text{FiC}$

$-6.00992\times 10^{7}\ \text{DeltaC} + 1.20198\times 10^{11}\ \text{FiC}$

ASTA BD

```
MBD = VBD FiD - UBD DeltaAste[[3]] + muBD
MDB = WDB FiD - UDB DeltaAste[[3]] + muDB
```

$-3.00496\times 10^{7}\ \left(-\sqrt{2}\ \text{DeltaB} + \sqrt{2}\ \text{DeltaC}\right) + 4.24965\times 10^{10}\ \text{FiD}$

$-3.00496\times 10^{7}\ \left(-\sqrt{2}\ \text{DeltaB} + \sqrt{2}\ \text{DeltaC}\right) + 8.4993\times 10^{10}\ \text{FiD}$

ASTA CD

```
MCD = WCD FiC + VCD FiD - UCD DeltaAste[[2]] +
  muCD
MDC = WDC FiD + VDC FiC - UDC DeltaAste[[2]] + muDC
```

$-\frac{250000000}{3} - 3.73865\times 10^{7}\ (\text{DeltaB} - \text{DeltaC}) + 1.24622\times 10^{11}\ \text{FiC} + 6.23108\times 10^{10}\ \text{FiD}$

$\frac{250000000}{3} - 3.73865\times 10^{7}\ (\text{DeltaB} - \text{DeltaC}) + 6.23108\times 10^{10}\ \text{FiC} + 1.24622\times 10^{11}\ \text{FiD}$

Scrittura delle equazioni di equilibrio

Equazioni di equilibrio alla rotazione

```
Eq1 = MCA + MCD
Eq2 = MDB + MDC
```

$$-\frac{250000000}{3} - 3.73865\times10^{7}\ (\text{DeltaB} - \text{DeltaC}) - 6.00992\times10^{7}\ \text{DeltaC} + 2.4482\times10^{11}\ \text{FiC} + 6.23108\times10^{10}\ \text{FiD}$$

$$\frac{250000000}{3} - 3.73865\times10^{7}\ (\text{DeltaB} - \text{DeltaC}) - 3.00496\times10^{7}\left(-\sqrt{2}\ \text{DeltaB} + \sqrt{2}\ \text{DeltaC}\right) + 6.23108\times10^{10}\ \text{FiC} + 2.09615\times10^{11}\ \text{FiD}$$

Equazione di equilibrio globale

```
PLV = (MAC + MCA) DeltaVirtualeAste[[1]]/H +
   (MBD + MDB) DeltaVirtualeAste[[3]]/
      (H/Sin[AngoloBeta]) +
   (MCD + MDC) DeltaVirtualeAste[[2]]/L +
   F DeltaVirtualeC +
   q L (+DeltaVirtualeB/Tan[AngoloBeta]/2 -
        DeltaVirtualeC/Tan[AngoloBeta]/2);

Eq3 = -Coefficient[PLV, DeltaVirtualeC]
Eq4 = -Coefficient[PLV, DeltaVirtualeB]
```

$$80000 - 43285.6\ \text{DeltaB} + 83351.7\ \text{DeltaC} - 2.27127\times10^{7}\ \text{FiC} - 5.11004\times10^{6}\ \text{FiD}$$

$$-100000 + 43285.6\ \text{DeltaB} - 43285.6\ \text{DeltaC} - 3.73865\times10^{7}\ \text{FiC} + 5.11004\times10^{6}\ \text{FiD}$$

Costruzione della matrice di rigidezza e del vettore dei termini noti

```
Sistema = {Eq1, Eq2, Eq3, Eq4};

MatriceK =
  Table[Table[Coefficient[Sistema[[i]], Incognite[[j]]],
     {j, 1, 4}], {i, 1, 4}];

MatrixForm[MatriceK]
```

$$\begin{pmatrix} 2.4482\times10^{11} & 6.23108\times10^{10} & -2.27127\times10^{7} & -3. \\ 6.23108\times10^{10} & 2.09615\times10^{11} & -5.11004\times10^{6} & 5. \\ -2.27127\times10^{7} & -5.11004\times10^{6} & 83351.7 & - \\ -3.73865\times10^{7} & 5.11004\times10^{6} & -43285.6 & \end{pmatrix}$$

```
Q = -Sistema /. {FiC -> 0, FiD -> 0, DeltaC -> 0,
     DeltaB -> 0}
```

$$\left\{\frac{250000000}{3},\ -\frac{250000000}{3},\ -80000,\ 100000\right\}$$

Soluzione delle equazioni di equilibrio

```
Sol = Solve[Sistema == 0, Incognite] // Flatten
```

```
{FiC → 0.00227621, FiD → -0.00118184,
 DeltaC → 3.91349, DeltaB → 8.32925}
```

Calcolo dei momenti nodali

ASTA AC

```
MACSol = MAC /. Sol
MCASol = MCA /. Sol
```

-9.83992×10^{7}

3.83992×10^{7}

ASTA BD

```
MBDSol = MBD /. Sol
MDBSol = MDB /. Sol
```

1.3743×10^{8}

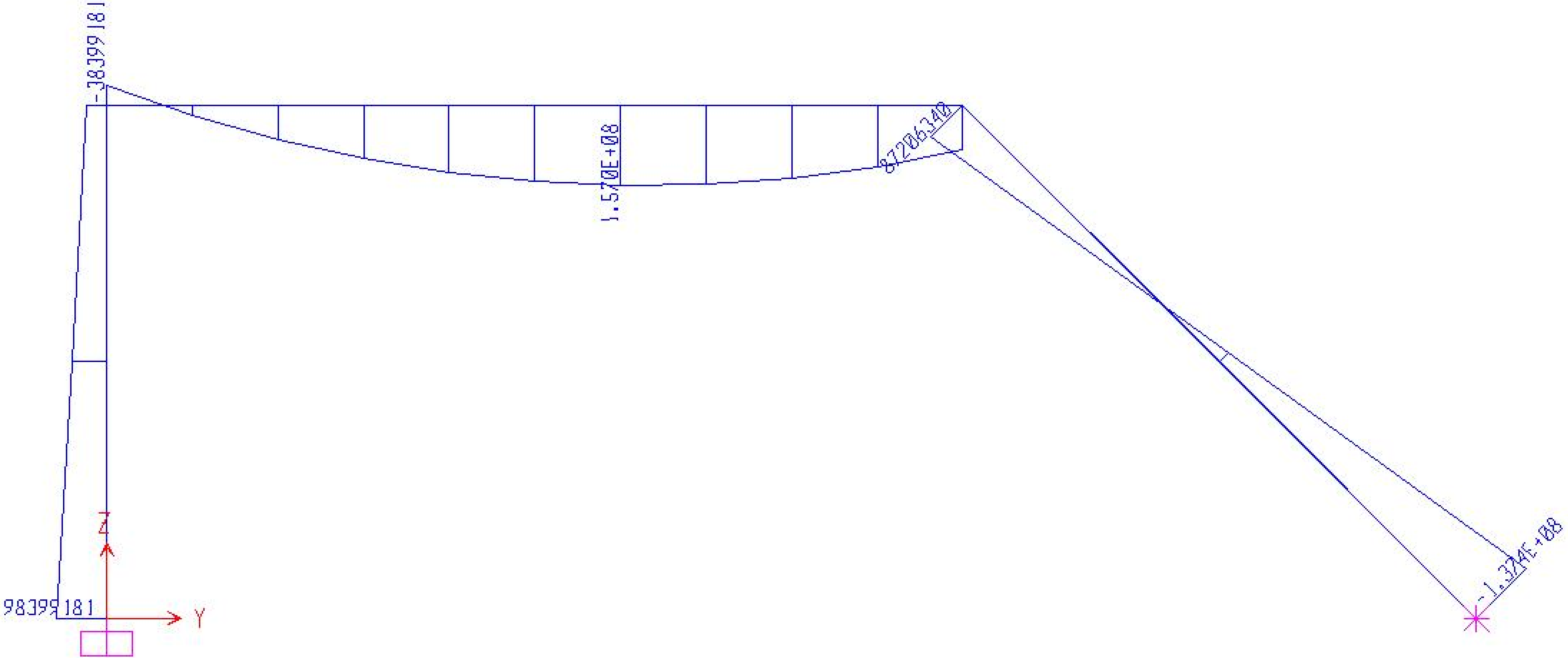
8.72063×10^{7}

ASTA CD

```
MCDSol = MCD /. Sol
MDCSol = MDC /. Sol
```

-3.83992×10^{7}

-8.72063×10^{7}



-38399181
1.570E+08
87206340
98399181
Z
Y
-1.374E+08